

Voorbeeldexamenopgaven syllabus Havo A

Hier treft u diverse voorbeeldexamenopgaven aan die op het niveau van eindexamenopgaven zijn geformuleerd. Het zijn bestaande 'oude' examenopgaven, bewerkingen van bestaande opgaven en ook compleet nieuwe opgaven. In deze opgaven wordt een beeld geschetst van de wijze waarop de (sub)domeinen van het examenprogramma kunnen worden getoetst binnen contexten. Voor de goede orde: deze verzameling opgaven moet niet gezien worden als een voorbeeldexamen: iedere opgave moet als een op zichzelf staande opgave gezien worden die in een examen voor zou kunnen komen. Om te illustreren hoe een examen eruit zou kunnen zien, verschijnt op korte termijn een voorbeeldexamen. In dit voorbeeldexamen zullen overigens ook opgaven (al dan niet aangepast) voor kunnen komen die in de voorliggende verzameling opgaven voorkomen.

Verder wijzen we er met nadruk op dat een nieuw type opgave deel uitmaakt van deze verzameling, de zogenoemde *korte onderzoeksopgave*. In dit opgavetype wordt een context aangereikt waarover vervolgens slechts één vraag gesteld wordt. Die vraag is, dat is althans het streven, een vraag die direct uit de context voortvloeit maar niet onmiddellijk beantwoord kan worden. Een leerling zal, om tot beantwoording te komen, de context moeten analyseren in het licht van de vraagstelling, soms moeten overgaan tot modellering of abstrahering, soms moeten kiezen voor een logische redenering. Er moet kortgezegd een zelfstandige onderzoeksactiviteit plaatsvinden. De bijbehorende maximumscore is daarmee ook redelijk hoog te noemen. Denk daarbij aan een maximumscore van 6 à 9 scorepunten. Het meegeleverde antwoordmodel moet bij dit type opgaven ook wat rekkelijker gehanteerd worden dan bij de 'reguliere' opgaven, dit omdat de leerling hier veelal een grotere vrijheid heeft om tot een antwoord te komen. Bij correctie van dit type opgaven vertrouwen we nog meer dan gebruikelijk op de expertise van de corrector.

In de tabel op de volgende pagina wordt aangegeven welke (sub)domeinen er in de vragen van deze set met opgaven aan de orde komen.

Het betreft de volgende opgaven:

	Opgave	Bron
A	Platvissen	examen wi havo A1,2 2006, 2e tijdvak, bewerkt
B	Paslengte	examen wi havo A1,2 2005, 2e tijdvak, bewerkt
C	Glasdikte	examen wi havo A 1994, 2e tijdvak
D	Bouwpakketten	nieuw
E	Bestrating	nieuw
F	CBS-cijfers	nieuw
G	Mastermind	nieuw
H	Noordpoolijs	nieuw
I	China's defensie-uitgaven	examen wi havo A 2010, 1e tijdvak, bewerkt
J	Brandstofverbruik	examen wi havo A 2010, 1e tijdvak, bewerkt
K	Groene zone	nieuw

Subdomeinen	opgaven met vragen											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
A1 Algemene vaardigheden De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gerichte informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.												
A2 Profielspecifieke vaardigheden De kandidaat kan een profielspecifieke probleemsituatie in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.							4	4	1	1	1	
A3 Wiskundige vaardigheden De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige, algebraïsche en deductieve vaardigheden en kan bewerkingen uitvoeren zonder ICT en waar nodig met ICT.												
B1 Rekenen De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met getallen en daarbij gebruik maken van de rekenkundige basisbewerkingen.			1 2 3			1		1				1
B2 Algebra De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met variabelen en daarbij gebruik maken van de algebraïsche basisbewerkingen.		3	4		1 2							
B3 Telproblemen De kandidaat kan telproblemen structureren en schematiseren en dat gebruiken bij berekeningen en redeneringen				1 2 3			1 2 3					
C1 Tabellen De kandidaat kan een tabel opstellen op basis van gegevens uit een tekst, een grafiek, een formule of andere tabellen en tabellen aflezen, interpreteren en in verband brengen met andere tabellen, grafieken, formules of tekst.	1		1									
C2 Grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden De kandidaat kan een grafiek tekenen op basis van gegevens uit een tekst, een tabel, een formule of andere grafieken en grafieken aflezen, interpreteren en in verband brengen met andere grafieken, formules of tekst.	2	4 5	1 2									
C3 Formules met één of meer variabelen De kandidaat kan door substitutie in een formule met één of meer variabelen waarden berekenen en een formule opstellen of wijzigen op basis van gegeven informatie.	3 5	1 2	1 2 3 4		3 4 5							
C4 Lineaire verbanden De kandidaat kan bij een lineair verband een formule opstellen en een grafiek tekenen, met lineaire verbanden berekeningen uitvoeren zoals interpolatie en extrapolatie, lineaire vergelijkingen en ongelijkheden oplossen en uitkomsten toepassen in profielspecifieke probleem situaties.						2		2 3				1
C5 Exponentiële verbanden De kandidaat kan exponentiële verbanden herkennen, met formules beschrijven, in grafieken weergeven en er berekeningen aan uitvoeren.	4					1 3		1	1	1		
D1 Helling De kandidaat kan over een grafiek uitspraken doen over stijgen, dalen, maximum en minimum en kan veranderingen te beschrijven middels differenties, hellingen en toenamedigrammen.	2	5						2				

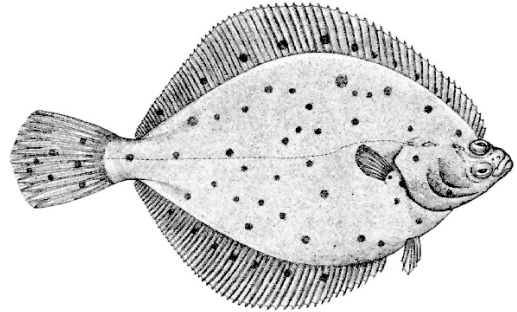
Voorbeeldexamenopgaven

A Platvissen

Er bestaan diverse soorten platvissen, bijvoorbeeld schollen en tongen. In de afbeelding hiernaast zie je een schol.

In de Beringzee is het onderzoekers van het Alaska Fisheries Science Center gelukt de groei en ontwikkeling van vrouwelijke schollen over een lange periode te volgen. Deze schollen kunnen maar liefst 30 jaar oud worden.

afbeelding

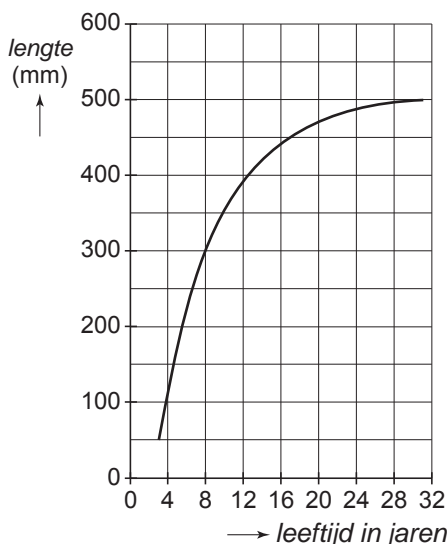


Hieronder staan twee grafieken met informatie over deze schollen.

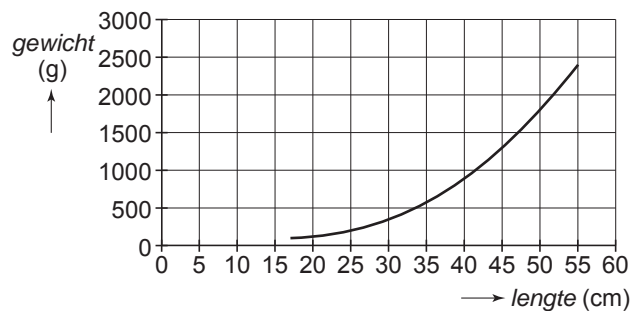
In figuur 1 zie je het verband tussen de leeftijd en de lengte.

In figuur 2 zie je het verband tussen de lengte en het gewicht.

figuur 1



figuur 2



De twee grafieken staan vergroot op de uitwerkbijlage.

Door deze grafieken te combineren, is te achterhalen wat het gewicht is van een vrouwtjesschol als je de leeftijd kent.

- 3p 1 Wat is het gewicht van een vrouwtjesschol van 14 jaar oud? Licht je antwoord toe met behulp van de grafieken op de uitwerkbijlage.

Uit beide grafieken kun je afleiden dat het gewicht van een vrouwtjesschol toeneemt, wanneer de vis ouder wordt. Op de uitwerkbijlage staan vijf verschillende schetsen die een mogelijk verband tussen de leeftijd en het gewicht weergeven.

- 3p 2 Onderzoek welk van deze schetsen het best past bij bovenstaande figuren 1 en 2.

Ook bij de tong neemt het gewicht toe met de leeftijd. Volgens de onderzoekers in Alaska kan het gewicht van de tong goed worden benaderd met de volgende formule:

$$W = 2,867 \cdot (1 - 0,93 \cdot 0,9094^t)^3$$

In deze formule is W het gewicht in kilogram en t de leeftijd in jaren.

- 3p **3** Bereken de leeftijd in jaren van een tong van 1,5 kg.

Een **cohort** vissen is een groep vissen van één soort die vrijwel tegelijk zijn geboren.

Voor een cohort van 1000 tongen is een formule opgesteld voor het aantal nog levende tongen N na t jaren:

$$N = 1000 \cdot 0,9048^t$$

Het aantal tongen in het cohort neemt ieder jaar af. Dat kunnen we zien aan de formule van N want daar is sprake van exponentiële groei met een groefactor die kleiner is dan 1.

Zo kunnen we ook beredeneren dat het gewicht van een tong ieder jaar toeneemt.

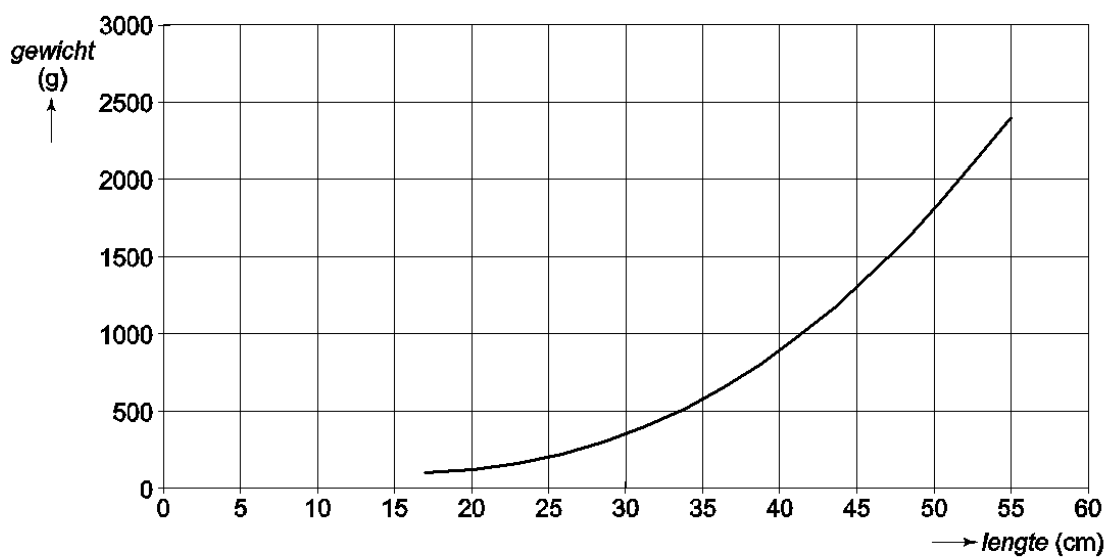
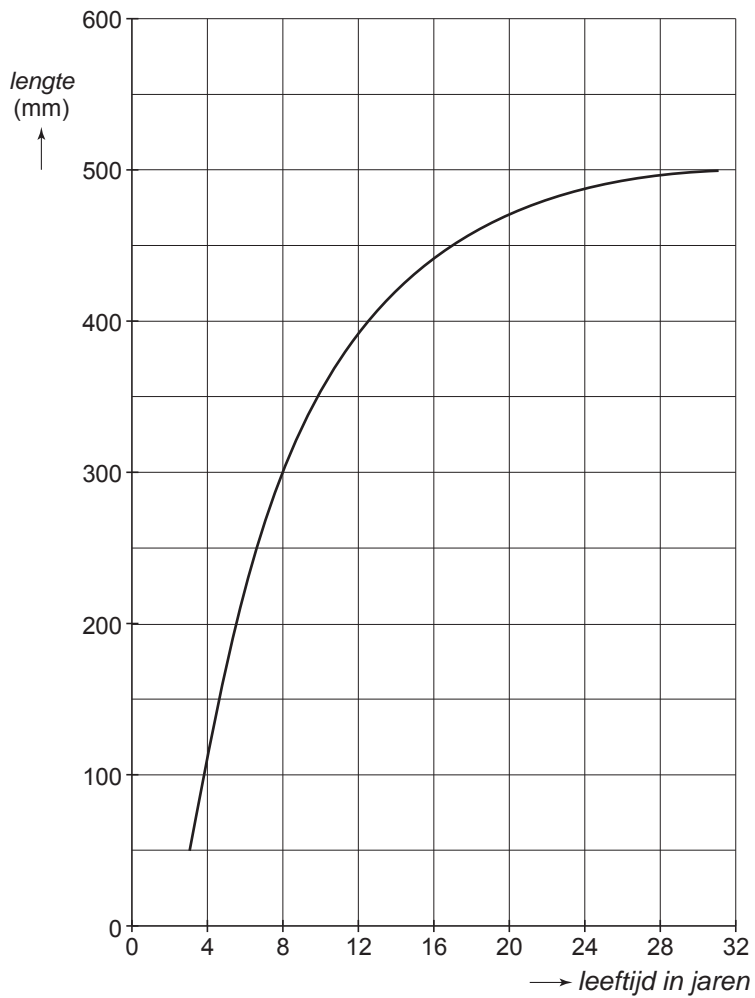
- 4p **4** Beredeneer, door alleen maar gebruik te maken van de formule van W , dat het gewicht van een tong ieder jaar toeneemt.

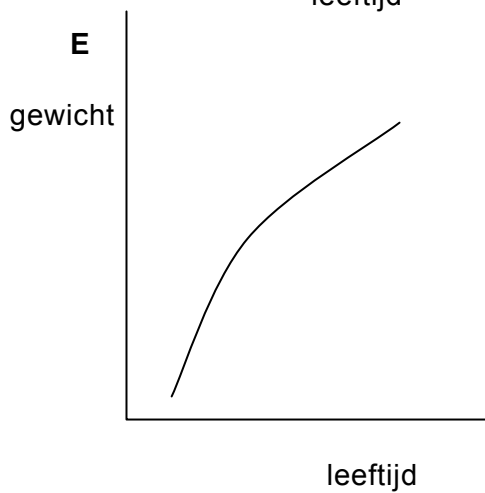
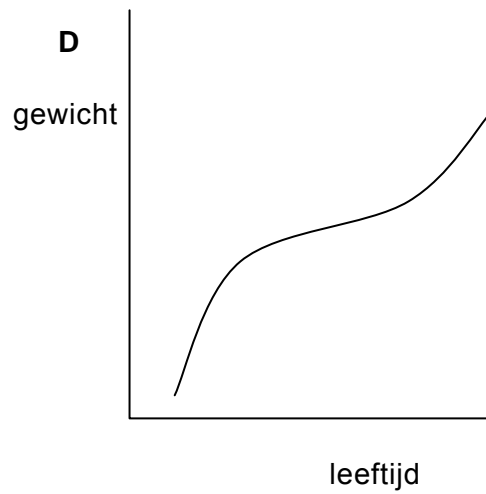
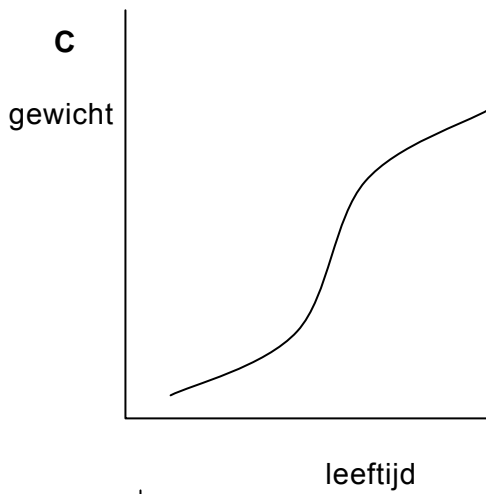
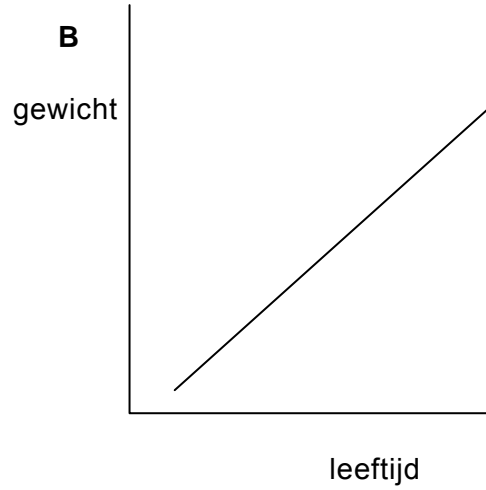
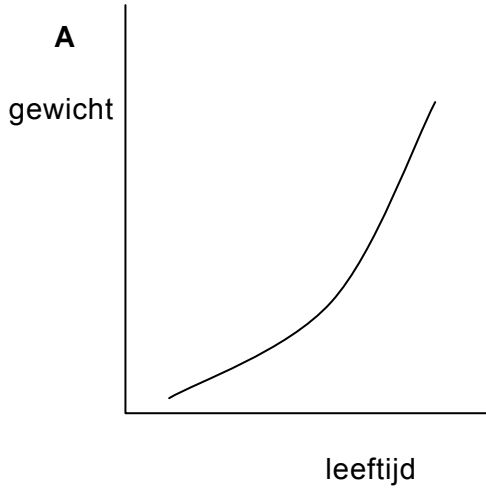
Naarmate de tijd verstrijkt, neemt het gewicht van een tong dus toe maar het aantal tongen af. Het totale gewicht van het cohort vissen zal eerst toenemen, maar later weer afnemen. Dat totale gewicht TG is te berekenen met de formule

$$TG = N \cdot W$$

- 4p **5** Bereken het maximale totale gewicht van het cohort tongen.

UITWERKBIJLAGE BIJ PLATVISSSEN





B Paslengte

De biomechanicus R. McNeill Alexander heeft van een groot aantal diersoorten de relatie tussen paslengte, snelheid en grootte bepaald. Uit zijn onderzoek is een formule afgeleid die een goede schatting geeft voor de snelheid van dieren

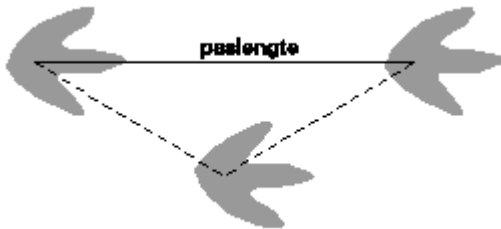
$$v = 2,81 \cdot s^{1,67} \cdot h^{-1,17}$$

Hierin is:

- v de snelheid in kilometer per uur;
- s de **paslengte** in meter tussen twee opeenvolgende voetafdrukken van dezelfde voet (zie figuur 1);
- h de hoogte in meter van de heup.

De formule geldt voor zowel twee- als viervoeters, zowel groot als klein, dus ook voor katten en honden.

figuur 1



Op een besneeuwd terras staan voetsporen van een kat. De heuphoogte van de kat is 21 cm en uit de voetsporen blijkt een paslengte van 35 cm.

- 3p 1 Bereken de snelheid van de kat toen die haar voetsporen achterliet.

Een hondenliefhebber fietst regelmatig met zijn hond. Het dier blijft dan keurig naast hem lopen, bij elke snelheid. De heuphoogte van de hond is 40 cm.

Als de snelheidsmeter van de fiets 15 km/u aangeeft, ligt de paslengte rond de anderhalve meter.

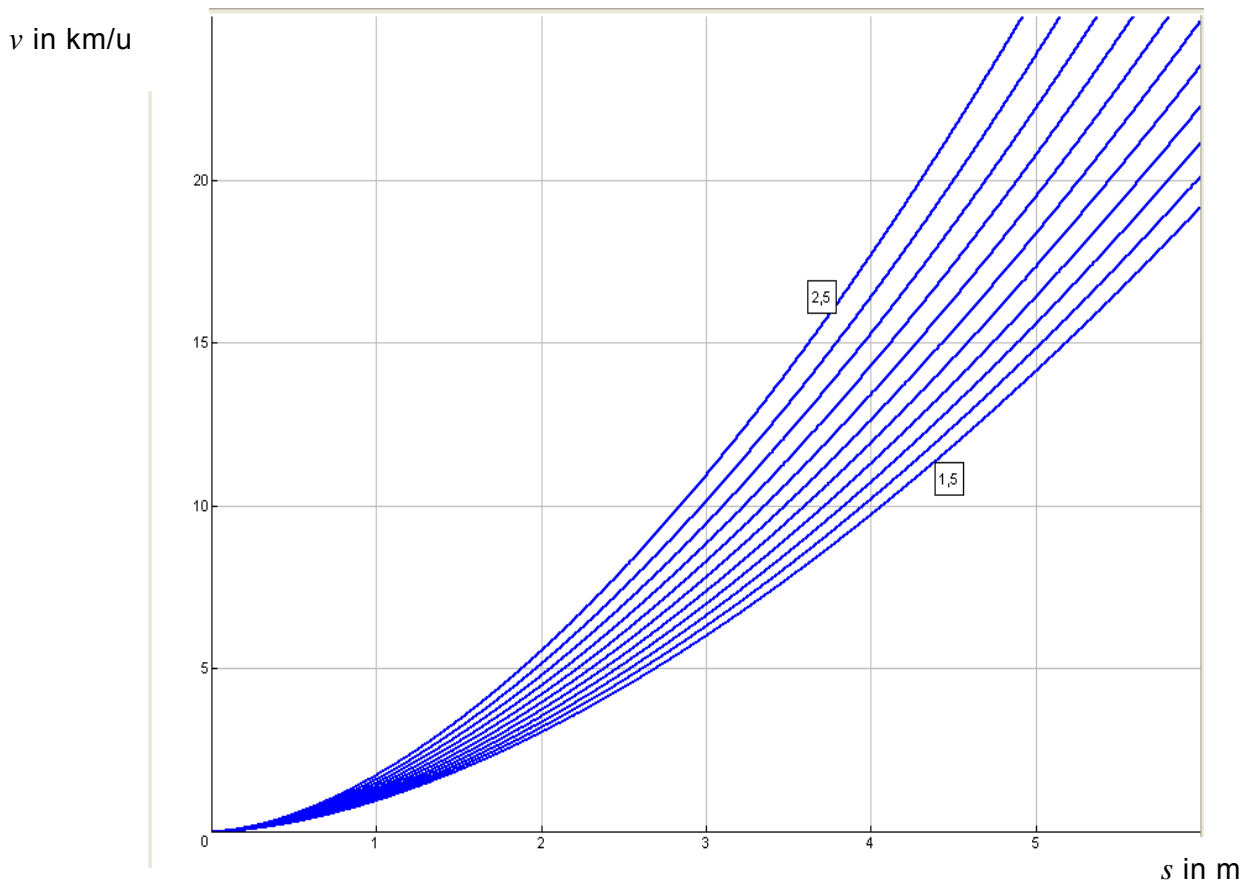
- 3p 2 Bereken de paslengte van deze hond in cm nauwkeurig in deze situatie.

Voor een vaste heuphoogte is de formule te herleiden tot $v = c \cdot s^{1,67}$. De waarde van c hangt dan af van de grootte van het dier.

- 4p 3 Toon aan dat voor de hond de waarde van $c = 8,21$ geldt.

In figuur 2 staan verschillende grafieken die voor verschillende waarden van de heuphoogte het verband tussen paslengte en snelheid geven. De heuphoogte die bij de grafiek hoort, staat bij twee van de tien getekende grafieken aangegeven: zie de getallen 1,5 en 2,5.

figuur 2



Bij een langere paslengte hoort een grotere snelheid.

- 2p **4** Hoe kun je in figuur 2 zien dat dit in ieder geval geldt voor de dieren waarvan de grafiek in de figuur staat afgebeeld?

Uit de grafieken kun je dus opmaken dat de snelheid groter zal worden als de paslengte toeneemt.

- 3p **5** Is de snelheidstoename bij dieren met een grotere heuphoogte groter, kleiner of gelijk aan de toename bij dieren met een kleinere heuphoogte? Geef bij je onderzoek duidelijk aan hoe je dat uit de grafieken in figuur 2 kunt concluderen.

C Glasdikte

In huizen en gebouwen wordt voor grote ruiten dikker glas gebruikt dan voor kleine ruiten. Dat is nodig om de ruit voldoende stevigheid te geven. De benodigde dikte wordt echter niet alleen bepaald door de grootte van een ruit.

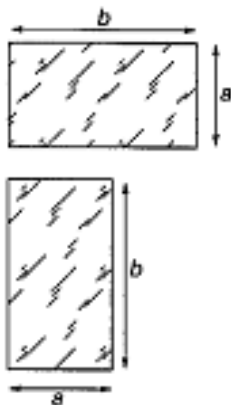
Om de minimaal beoogde dikte D van een ruit te bepalen, gebruikt men de volgende formule:

$$D = 0,447 \times \beta \times a \times q$$

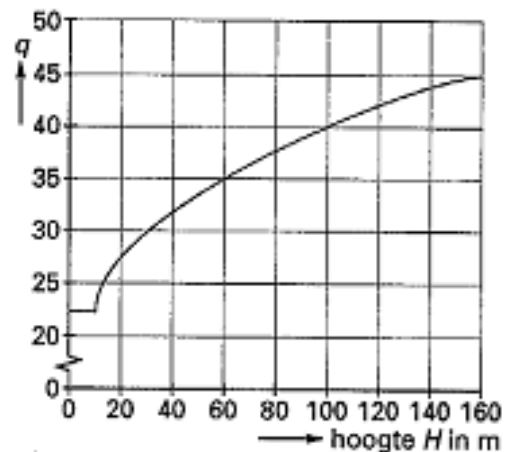
In de formule en het vervolg van de opgave worden de volgende symbolen gebruikt:

- D = minimale dikte in mm,
- a = kleinste zijde van de ruit in m (zie figuur 1),
- b = grootste zijde van de ruit in m,
- β = vormfactor afhankelijk van $\frac{b}{a}$ (zie tabel 1),
- q = windbelastingsfactor (zie figuur 2),
- H = hoogte waar de ruiten in het gebouw zitten in m.

figuur 1



figuur 2



tabel 1

$\frac{b}{a}$	β	$\frac{b}{a}$	β	$\frac{b}{a}$	β	$\frac{b}{a}$	β
1,00	0,535	1,40	0,673	1,80	0,754	2,40	0,811
1,05	0,557	1,45	0,687	1,85	0,762	2,50	0,815
1,10	0,567	1,50	0,699	1,90	0,770	3,00	0,845
1,15	0,595	1,55	0,709	1,95	0,775	4,00	0,860
1,20	0,613	1,60	0,720	2,00	0,780	5,00	0,864
1,25	0,630	1,65	0,729	2,10	0,790	groter	
1,30	0,645	1,70	0,737	2,20	0,799	dan 5,00	0,865
1,35	0,660	1,75	0,746	2,30	0,806		

In een hoog kantoorgebouw hebben alle ruiten dezelfde afmetingen: $a = 2$ en $b = 3$.

- 4p 1 Laat zien dat de minimale glasdikte voor ruiten op 5 m hoogte in dit gebouw ongeveer 14 mm is.

- 5p **2** Hoeveel procent moeten de ruiten op 60 m hoogte dikker zijn dan de ruiten op 5 m hoogte? Licht je antwoord toe.

Stel dat de lengte en breedte van de ruiten op 100 m hoogte nog mogen variëren. De oppervlakte van de ruit moet wel 6 m^2 zijn en de kleinste zijde a moet minstens 1 m zijn.

- 6p **3** Onderzoek of de minimale dikte het kleinst is als de ruit vierkant is.

In een gebouw wil men op 100 m hoogte ruiten plaatsen waarvan de verhouding van lengte en breedte $8 : 5$ is. De dikte van de ruiten moet 22 mm zijn.

- 5p **4** Welke afmetingen kunnen de ruiten maximaal hebben? Licht je antwoord toe.

D Bouwpakketten

Een KewLox-kast wordt geleverd als bouwpakket en wordt vooraf door de klant naar eigen wens samengesteld. De hoogte, de breedte en de diepte van een kast zijn ieder variabel. Zie onderstaande tabel.

Tabel

Breedte in cm	60	80	90	100	110	120
Diepte in cm	25	30	40	50	60	
Vakhoogte in cm	35	45	55			

Elke samenstelling van breedte, diepte en hoogte is leverbaar.

De hoogte van een kast wordt bepaald door het aantal vakken dat men bovenop elkaar plaatst. Door de diverse maten bij elkaar op te tellen, krijgt men de totale hoogte of de totale breedte van de kast. Door bijvoorbeeld alle mogelijke vakhoogtes te combineren, ontstaat een kast met een hoogte van $35 + 45 + 55 = 135$ cm.

Er wordt kastruimte besteld met een totale breedte van 300 cm. Dit betekent dat een aantal kastdelen gekoppeld wordt tot één grote kast. Ieder kastdeel is zelf een echte kast en kan zelfstandig staan en gebruikt worden.

- 4p 1 Onderzoek op hoeveel manieren een totale breedte van 300 cm gekozen kan worden als er tenminste één kastdeel van 60 cm breed bij moet zijn.

Een klant kiest voor een samenstelling met daarin 2 kastdelen van 60 cm breed, 1 kastdeel van 80 cm en 1 kastdeel van 100 cm breed. De hoogte van de kast wordt 200 cm en de diepte 40 cm.

Hij weet echter nog niet hoe breed de verschillende kastdelen moeten zijn en ook weet hij niet hoe groot de hoogte van de verschillende vakken moet zijn. Wel weet hij dat de totale kast er heel regelmatig uit moet zien: alle kastdelen hebben steeds precies dezelfde hoogte-indeling van de verschillende vakken.

Door nu van links naar rechts de breedte van kastdelen en van onder naar boven de hoogtes van de vakken te kiezen kan hij de kast gaan opbouwen.

- 6p 2 Op hoeveel manieren kan hij zijn kast opbouwen? Licht je antwoord toe.

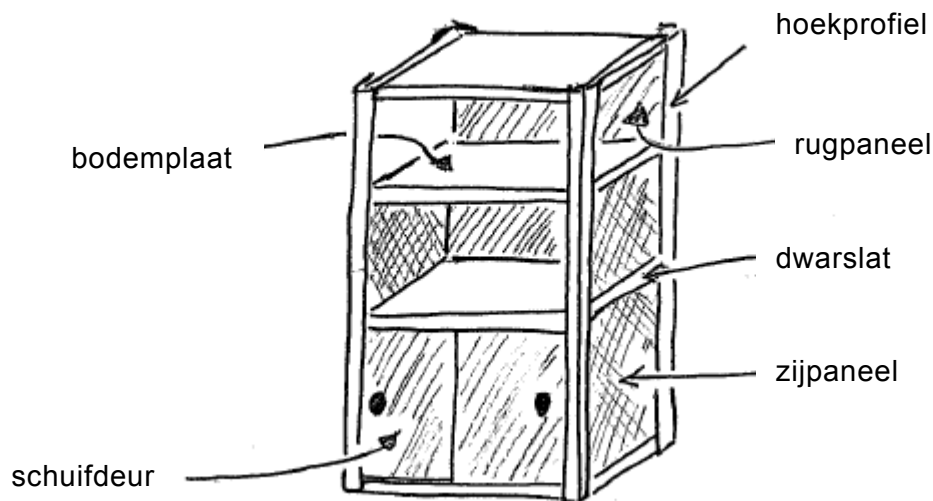
Een KewLox-kast bestaat uit 4 **soorten** onderdelen. Deze onderdelen zijn:

- hoekprofielen: in 3 varianten, namelijk blank, wit of zwart gelakt;
- dwarslatten: in 3 varianten, namelijk blank, wit of zwart gelakt;
- bodemplaten: in 3 varianten, namelijk blank, wit of zwart gelakt;
- schuifdeuren, zijpanelen en rugpanelen in glas, hout of perspex, al met al in nogal wat **varianten**: de uitvoering in hout is verkrijgbaar in de kleuren: blank, wit en zwart. De perspex-uitvoering is leverbaar in maar liefst 21 kleuren waaronder zwart en wit.

Zie ook de onderstaande schets.

Een klant wordt wat zenuwachtig van de verschillende mogelijkheden en legt zichzelf de volgende beperking op: als er meerdere exemplaren van een onderdeel nodig zijn dan zijn al deze exemplaren in dezelfde variant. Dat wil zeggen: bij een kast met, bijvoorbeeld, 2 schuifdeuren zijn alle schuifdeuren van hout in wit gelakte uitvoering of alle schuifdeuren in blank hout of alle schuifdeuren enzovoort.

schets

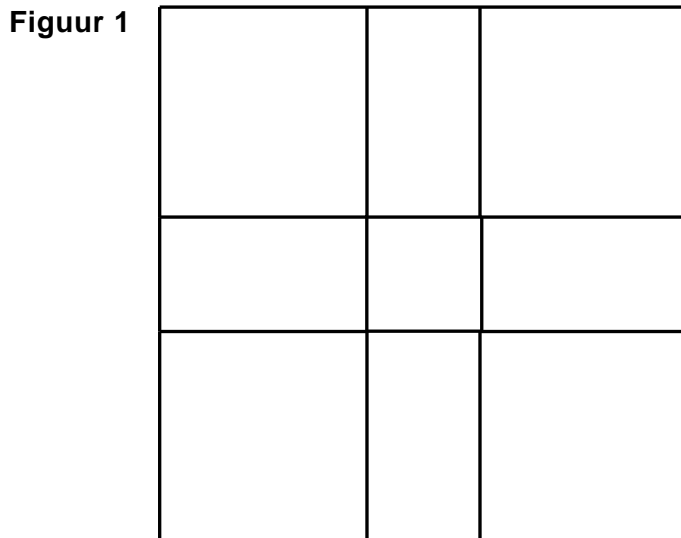


Dit geeft nog steeds heel veel mogelijkheden.

- 3p **3** Op hoeveel manieren is voor deze klant een kast samen te stellen als er per soort onderdeel vrij gekozen mag worden wat betreft de varianten? Licht je antwoord toe.

E Bestrating

Bij het bestraten van een groot terras waarvan de oppervlakte nog niet vaststaat, kiest de tuinarchitect voor een basismotief met vier even grote vierkanten die samen met een kleiner vierkant en vier rechthoeken een groot vierkant vormen. Zie ook figuur 1.



Voor de vier even grote vierkanten en het kleine vierkant in het midden wordt gebruikt gemaakt van gebakken klinkers van het zogenoemde Waalformaat.

Voor de rechthoeken kiest de architect voor betonklinkers, het zogeheten Keiformaat.

Omdat hij nog niet weet hoe lang de zijden van de vierkanten en de rechthoeken worden, maakt hij een volgende schets. Zie figuur 2.

De lengte van de zijden van de grote vierkanten geeft hij aan met de letter w en de breedte van de rechthoeken wordt aangegeven met de letter k . Zowel w als k zijn gegeven in meters.

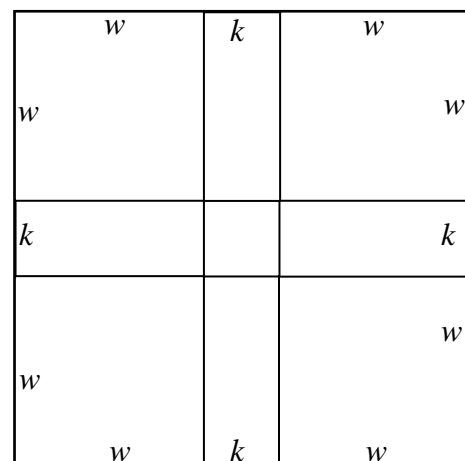
De oppervlakte bestraat met Waalformaat geven we aan met O_W .

De oppervlakte bestraat met Keiformaat geven we aan met O_K .

De totale oppervlakte van het terras geven we aan met O .

Alle drie oppervlaktes worden bepaald in m^2 .

Figuur 2



3p 1 Leg uit dat de oppervlakte van het hele terras wordt gegeven door de formule $O = (2w + k)^2$.

6p 2 Bepaal soortgelijke formules voor O_W en O_K en laat met deze formules en de formule van O zien dat $O = O_W + O_K$.

De architect heeft de volgende formule opgesteld waarmee de totale kosten K (in euro) van het terras bepaald kunnen worden:

$$K = 300w^2 + 175wk + 75k^2$$

Met deze formule is uit te rekenen hoeveel 1 m² Waalklinkers van dit terras kost.

- 4p **3** Bereken hoeveel 1 m² Waalklinkers van dit terras kost.

De opdrachtgever besluit na overleg met de architect om de lengte van de smalle kant van de rechthoeken precies gelijk aan de helft van de lengte van de zijden van de grote vierkanten te nemen.

- 4p **4** Laat zien dat de formule voor K nu geschreven kan worden als $K = 406,25 \cdot w^2$.

Het te besteden bedrag blijkt €10 500,- te zijn en de opdrachtgever blijkt een zo groot mogelijk terras voor dat geld te willen.

- 6p **5** Bereken de oppervlakte van het terras.

F CBS-cijfers

Hieronder tref je een citaat aan uit het dagblad Trouw van 29 april 2010:

Deze week bleek dat het verbruik van duurzame energie vorig jaar in Nederland is gestegen van 3,4% naar 4% van het totale energiegebruik.

Dit is veel te weinig om het doel van 20% in 2020 te halen, reageerde Liesbeth van Tongeren, die op de kandidatenlijst voor de Tweede Kamer van Groen Links staat. Welnee, twittert PvdA-kamerlid Diederik Samsom: "De CBS-cijfers zijn hoopvol, de laatste twee jaar is het aandeel gegroeid met 40%. In dat tempo halen we het doel in 2020."

Samsom maakt geen rekenfout bij zijn verdediging van het beleid. In 2007 lag het aandeel immers nog op 2,8%. Maar als het aandeel duurzame energie vanaf nu elk jaar met 0,6 procentpunt stijgt halen we de doelen niet, zegt van Tongeren en ook daar is geen speld tussen te krijgen.

- 3p **1** Laat met een berekening zien dat de door Samsom genoemde 40% in de laatste twee jaar zelfs nog te laag is.

In het stukje spreekt Van Tongeren over een stijging met 0,6 procentpunt, dit is bijvoorbeeld de stijging van 2,8% (het percentage in 2007) naar 3,4% (het percentage in 2008) of van 3,4% naar 4% (het percentage in 2009).

De discussie die hier beschreven wordt, is de discussie tussen lineaire en exponentiële groei. Mevrouw Van Tongeren gaat uit van lineaire groei van het aandeel duurzame energie in het totale energiegebruik.

- 5p **2** Stel een formule op waarmee je volgens de aanname van mevrouw Van Tongeren kunt berekenen hoeveel procent van het totale energiegebruik aan duurzame energie verbruikt wordt en bereken met deze formule hoe groot het percentage duurzame energie is in 2020.

Meneer Samsom gaat uit van exponentiële groei.

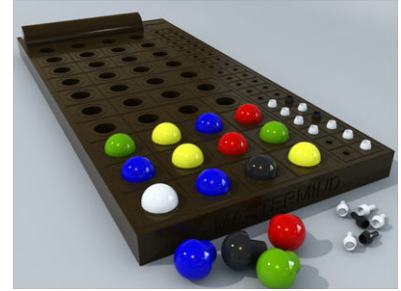
- 6p **3** Stel een formule op waarmee je volgens de aanname van meneer Samson (40% groei in 2 jaar) kunt berekenen hoeveel procent van het totale energiegebruik aan duurzame energie verbruikt wordt en bereken met deze formule hoe groot het percentage duurzame energie is in 2020.

G Mastermind

Bij het spel Mastermind moet je een code kraken. Je speelt het spel met z'n tweeën. De ene speler maakt de code. De andere speler, die de code niet kan zien, probeert die code in zo weinig mogelijk beurten te vinden.

Een code bestaat uit 4 posities en elke positie wordt gevuld met een pinnetje van een bepaalde kleur. Er zijn 6 kleuren in het spel. Er mogen geen posities leeg blijven.

We gaan er in eerste instantie van uit dat iedere kleur slechts ten hoogste 1 keer in de code voorkomt.



- 3p **1** Bereken het aantal mogelijke codes.

Jan en Esther spelen samen Mastermind. Jan heeft een code bedacht en Esther doet een eerste poging om de code te raden.

Ze raadt BLAUW-GEEL-ROOD-ZWART.

Het blijkt dat ze alle kleuren goed heeft, maar het blijkt ook dat geen van de kleuren op de juiste positie staat.

- 6p **2** Hoeveel mogelijkheden zijn er nu nog over voor Esther? Licht je antwoord toe, bijvoorbeeld met een tabel waarin alle mogelijkheden uitgeschreven worden.

Jan en Esther besluiten de spelregels te veranderen. Je mag een kleur nu vaker gebruiken in een code. Dit betekent dat de code kan bestaan uit 1, 2, 3 of 4 kleuren. Elke positie moet wel gevuld zijn.

Esther is aan de beurt om een code te maken.

- 3p **3** Bereken uit hoeveel mogelijke codes Esther nu kan kiezen.

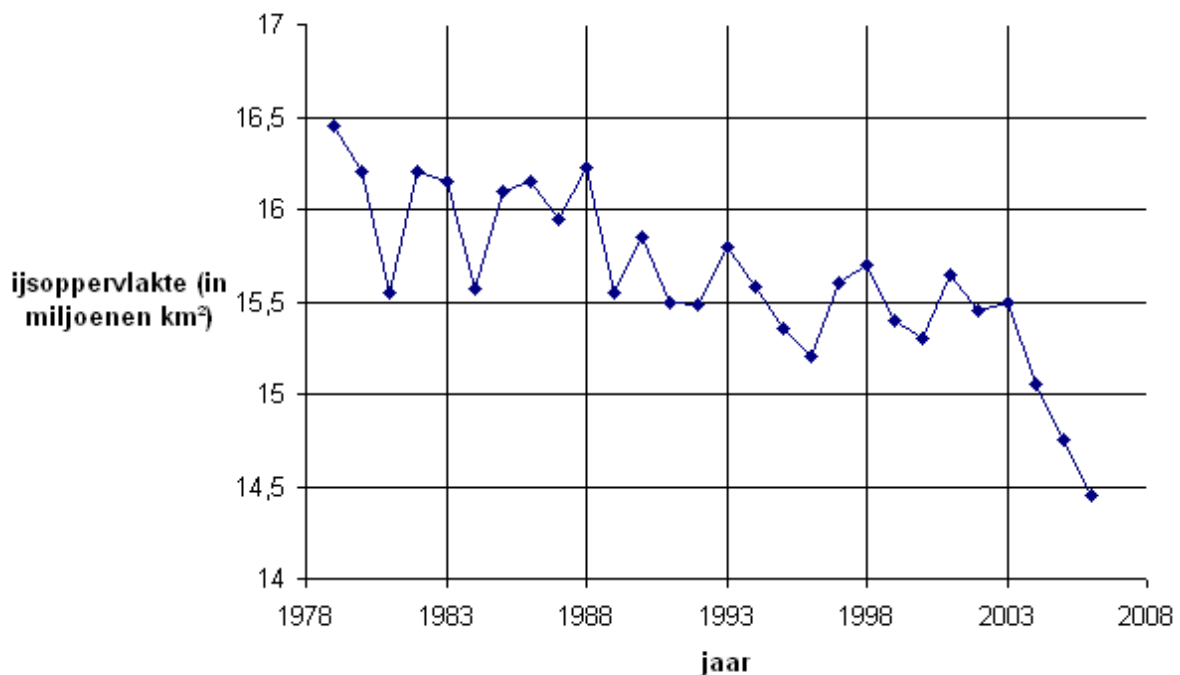
De eerste poging van Jan is GEEL-GEEL-BLAUW-ROOD. Dit levert meteen een goed resultaat op: hij heeft de 4 juiste pinnetjes, alleen staat er maar 1 op de goede plek. Jan weet uiteraard niet welke van de 4 pinnetjes op de goede plek staat.

- 4p **4** Leg uit waarom het niet het blauwe of het rode pinnetje kan zijn dat op de goede plek staat.

H Noordpoolijs

Op de website van het National Snow and Ice Data Centre staat de volgende (vertaalde) tekst:

De oppervlakte van de ijskap van de Noordpool neemt in de afgelopen jaren duidelijk af. Nieuwe satellietgegevens van NASA en het Amerikaanse National Snow and Ice Data Centre laten zien dat de ijskap niet alleen in de zomer steeds kleiner wordt, maar dat ook de oppervlakte van het Noordpoolijs in de winter sinds de zeventiger jaren van de vorige eeuw, duidelijk terugloopt.



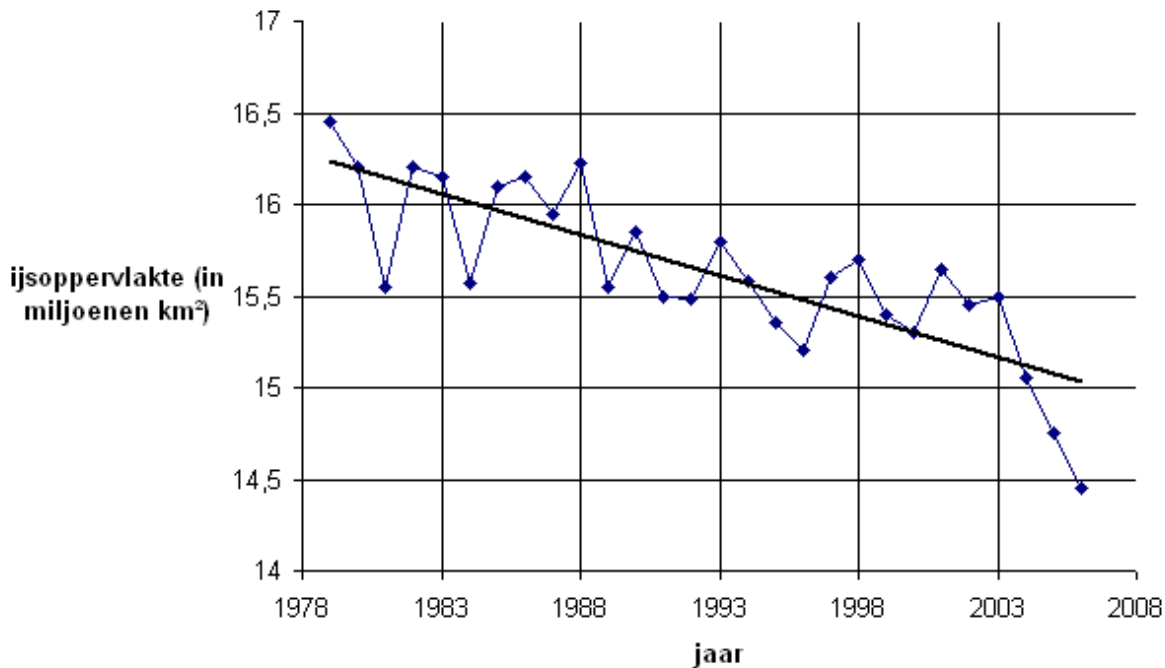
In bovenstaande grafiek is het verloop van het totale ijsoppervlak (in miljoenen km²) van de Noordpool in de winter zichtbaar.

Afgaande op deze gegevens schrijft een journalist een artikel. Hij wil graag een dramatische kop en bedenkt de volgende zin als kop voor dat artikel:

NOORDPOOLIJS NEEMT MET ...% AF!

- 3p 1 Wat is het meest dramatische percentage dat hij op basis van deze gegevens in de kop kan opnemen? Vermeld je bijbehorende berekening.
- 4p 2 Bereken de gemiddelde jaarlijkse afname (in miljoenen km²) van het ijsoppervlak op de Noordpool in de winter in de jaren 1979 – 2006.

In de figuur uit het artikel is een trendlijn getekend. Zie onderstaande figuur.



Voor de trendlijn is een formule $Opp = at + b$ op te stellen met $t = 0$ in 1978.

- 6p **3** Bepaal de waarde van a en b in deze formule, uitgaande van de bovenstaande grafiek, en bereken met behulp van de formule in welk jaar er geen ijs meer op de Noordpool zal zijn.

Er zijn mensen die vinden dat het National Snow and Ice Data Centre de waarschuwingen overdrijft dat al het ijs aan het smelten is. Zij gebruiken bijvoorbeeld de gegevens van 1990 tot 2003.

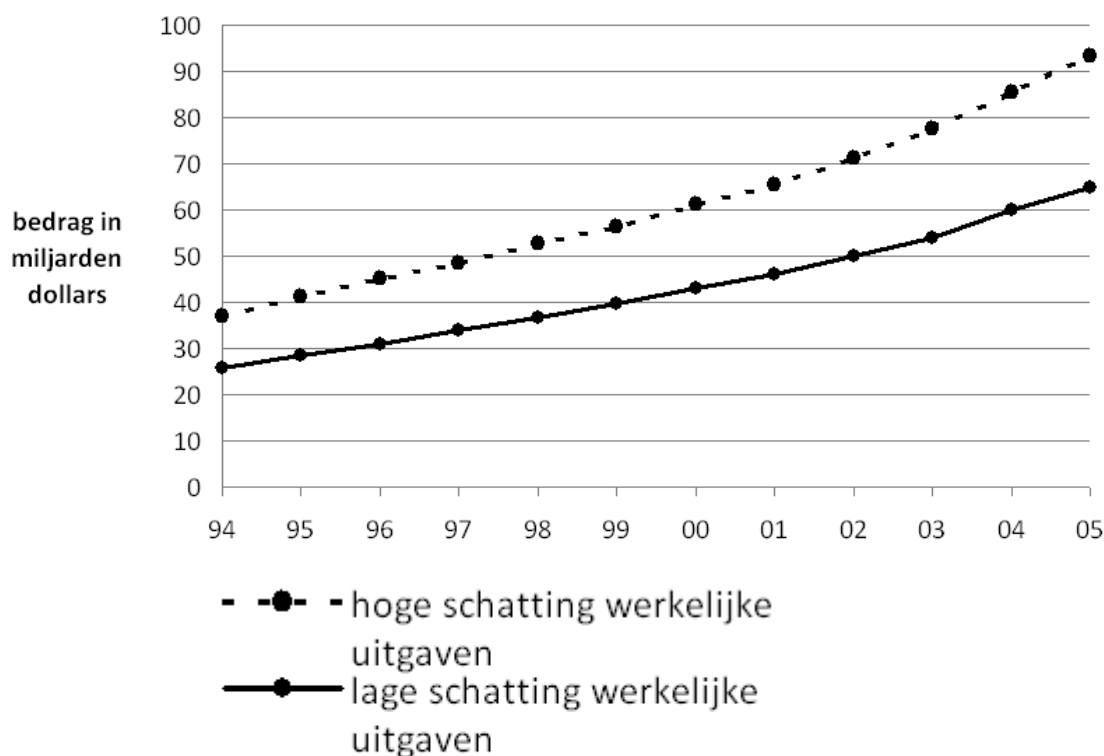
- 2p **4** Waarom zullen deze mensen dit deel van de grafiek gebruiken?

Korte onderzoekopgaven:

I China's defensie-uitgaven (gebaseerd op HA 2010-1)

China ontwikkelt zich in hoog tempo tot grootmacht, ook op het militaire vlak. Het Pentagon, het Amerikaanse Ministerie van Defensie, houdt de Chinese defensie-uitgaven nauwlettend in de gaten. In de figuur staan de Chinese defensie-uitgaven volgens twee schattingen van het Pentagon, een hoge en een lage.

figuur 1



Zoals duidelijk te zien is in de figuur wordt het verschil tussen de hoge en de lage schatting steeds groter. In de toekomst zal dat verschil, als alles verloopt zoals tot nu toe, alleen maar nog groter zijn.

- 7p 1 Onderzoek met behulp van de gegevens in de figuur in welk jaar de hoge schatting voor het eerst meer dan 80 miljard groter is dan de lage schatting. Maak daarbij gebruik van exponentiële modellen.

J Brandstofverbruik (gebaseerd op HA 2010-1)

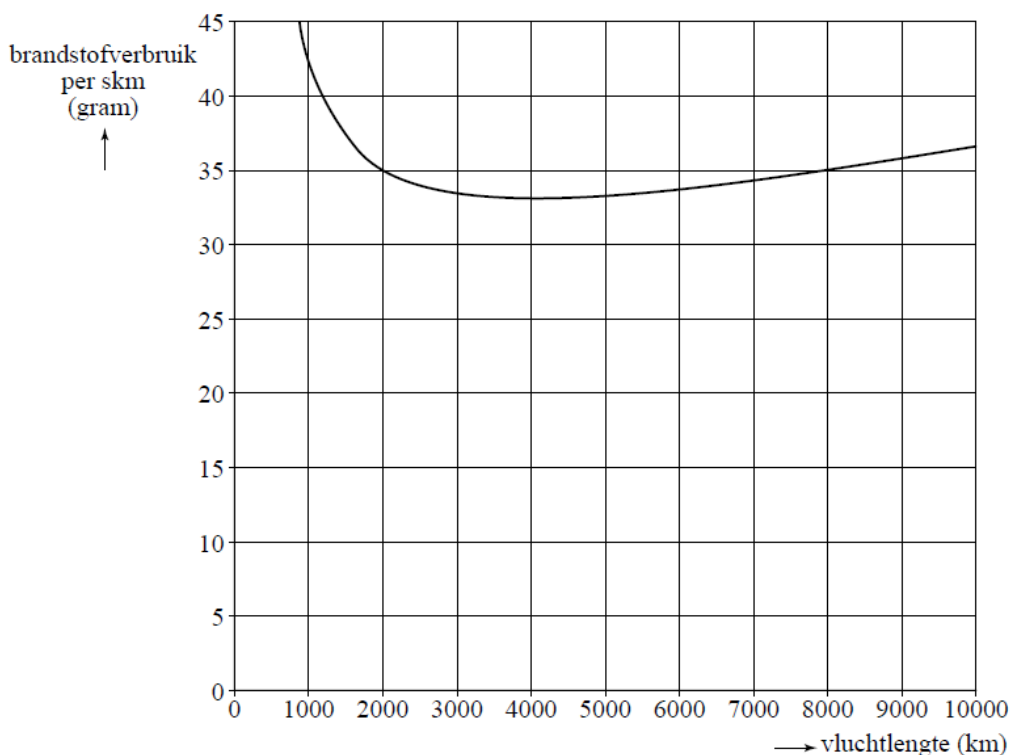
Vliegen kost veel brandstof. Een flink deel van de totale kosten van een vlucht bestaat uit brandstofkosten. Voor vliegmaatschappijen is het dus interessant om zuinige vliegtuigen te gebruiken.

Om het brandstofverbruik van verschillende typen vliegtuigen te kunnen vergelijken, kijkt men naar het brandstofverbruik per kilometer per passagier. Men gaat er daarbij van uit dat alle plaatsen (stoelen) in het vliegtuig bezet zijn. Dit brandstofverbruik per kilometer per passagier wordt **brandstofverbruik per skm** (stoelkilometer) genoemd en wordt uitgedrukt in gram.

We gaan er in deze opgave van uit dat een vliegtuig altijd precies de hoeveelheid brandstof meeneemt die voldoende is voor de lengte van de vlucht.

In de figuur is voor een vliegtuigtype met 524 stoelen aan boord het brandstofverbruik per skm uitgezet tegen de vluchtlengte in km.

figuur

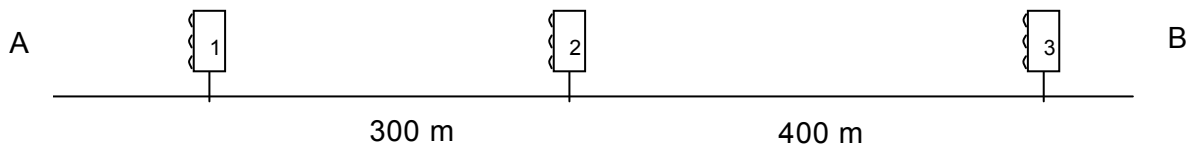


Een toestel van dit type moet worden ingezet op een vlucht met een lengte van 9000 kilometer. Wanneer er mogelijkheden zijn voor een tussenlanding kan dat voordelig zijn, want voor kortere vluchten is het brandstofverbruik per skm lager doordat er minder brandstof meegenomen hoeft te worden.

- 7p 1 Onderzoek of men door het maken van één tussenlanding ten minste 5% aan brandstof kan besparen.

K Groene zone

Op een weg tussen A en B staan achter elkaar 3 werkende verkeerslichten. Alledrie de verkeerslichten hebben een even grote tijd groen licht (maar niet persé op hetzelfde moment). De afstand tussen verkeerslicht 1 en verkeerslicht 2 is 300 meter en tussen verkeerslichten 2 en 3 zit 400 meter. Zie onderstaande figuur.



De bedoeling is dat er een zogenoemde **groene zone** ingesteld wordt op deze weg. Bij die groene zone wordt ervoor gezorgd dat een auto die met een snelheid van 50 km/u over deze weg van A naar B rijdt, bij alle verkeerslichten groen heeft.

- 6p 1 Geef aan hoe de lichten afgesteld moeten zijn om die groene zone te realiseren.

Voorbeeldexamenopgaven beoordelingsmodel

A Platvissen

1 maximumscore 3

- Bij 14 jaar hoort volgens figuur 1 een lengte van (ongeveer) 420 mm 1
- $420 \text{ mm} = 42 \text{ cm}$ 1
- In figuur 2 bij 42 cm aflezen dat het gewicht dan (ongeveer) 1000 gram is 1

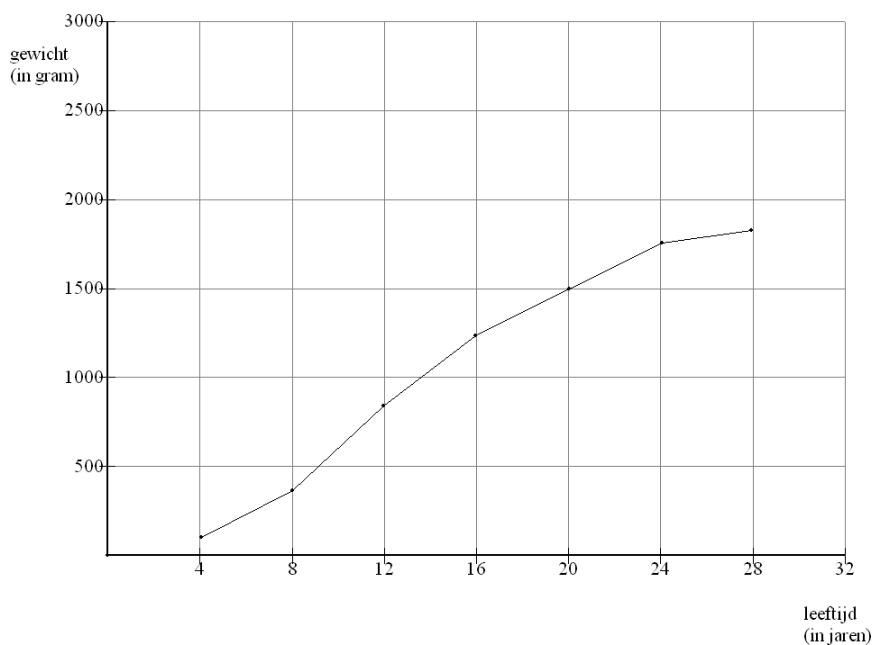
2 maximumscore 3

- Het maken van een tabel met daarin bijvoorbeeld de volgende waarden: 1

<i>leeftijd (in jaren)</i>	4	8	12	16	20	24	28
<i>lengte (in mm)</i>	120	300	390	440	470	485	499
<i>gewicht (in g)</i>	100	350	800	1250	1500	1750	1800

- Het schetsen van een bijpassende grafiek 1

Voorbeeld van een grafiek



- De conclusie: dus schets C past het beste 1

3 maximumscore 3

- $2,867 \cdot (1 - 0,93 \cdot 0,9094^t)^3 = 1,5$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking moet worden opgelost 1
- De tong is dan 16 jaar (of 16,5 jaar) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

4 **maximumscore 4**

- De groeifactor 0,09094 is kleiner dan 1 en dus is $0,9094^t$ dalend 1
- $-0,93 \cdot 0,9094^t$ is stijgend 1
- Dus $1 - 0,93 \cdot 0,9094^t$ is stijgend 1
- Conclusie: $2,867 \cdot (1 - 0,93 \cdot 0,9094^t)^3$ neemt toe als t toeneemt 1

5 **maximumscore 4**

- De formule voor het totale gewicht is

$$TG = 1000 \cdot 0,9048^t \cdot 2,867 \cdot (1 - 0,93 \cdot 0,9094^t)^3$$
 2
- Het beschrijven van de werkwijze met de GR hoe de formule is ingevoerd en het maximum gevonden kan worden 1
- Het antwoord: (ongeveer) 303 kg 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

B Paslengte

- | | | |
|---|---|------------------|
| 1 | maximumscore 3 <ul style="list-style-type: none"> • $s = 0,35$ en $h = 0,21$ • De snelheid is $2,81 \cdot 0,35^{1,67} \cdot 0,21^{-1,17} \approx 3,0$ km/uur | 1
2 |
| 2 | maximumscore 3 <ul style="list-style-type: none"> • Het opstellen van de vergelijking: $15 = 2,81 \cdot s^{1,67} \cdot 0,40^{-1,17}$ • Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR kan worden opgelost • Het antwoord $s \approx 1,43$ meter (of 143 cm) | 1
1
1 |
| 3 | maximumscore 4 <ul style="list-style-type: none"> • $h = 0,4$ moet in de formule $v = 2,81 \cdot s^{1,67} \cdot h^{-1,17}$ worden ingevuld • $v = 2,81 \cdot s^{1,67} \cdot 0,4^{-1,17}$ • Herleiden tot $v = 2,81 \cdot s^{1,67} \cdot 0,4^{-1,17} \approx 8,209 \cdot s^{1,67}$ • Afronden op twee decimalen leidt tot $c = 8,21$ | 1
1
1
1 |
| 4 | maximumscore 2 <ul style="list-style-type: none"> • Elk van de getekende grafieken is stijgend • Stijgen betekent: hoe groter de paslengte, hoe groter de snelheid | 1
1 |
| 5 | maximumscore 3 <ul style="list-style-type: none"> • In de figuur kun je aflezen dat een grotere heuphoogte een hoger liggende grafiek oplevert • Ook zie je dat een hoger liggende grafiek steiler loopt dan een lager liggende grafiek bij een en dezelfde snelheid • Door dat steiler lopen kun je concluderen dat de snelheidstoename bij grotere heuphoogte groter is dan bij kleinere heuphoogte | 1
1
1 |

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

C Glasdikte

1 maximumscore 4

- $\frac{b}{a} = 1,5$ geeft $\beta = 0,699$ 1
- $q = 22,5$ 2
- De minimale dikte: $0,447 \cdot 0,699 \cdot 2 \cdot 22,5 \approx 14$ 1

2 maximumscore 5

- $q = 35$ op 60 m hoogte 1
- De glasdikte op 60 m is (ongeveer) 22 mm 2
- Het antwoord: (ongeveer) 56% 2

of

- Op 60 m hoogte is $q = 35$ 1
- De verhouding van de waarden van q op 60 m en op 50 m hoogte 2
- Het antwoord: (ongeveer) 56% 2

3 maximumscore 6

- Bij een vierkant geldt: $a = b = \sqrt{6} \approx 2,45$ 1
- $\beta = 0,535$ 1
- De minimale dikte is dan ongeveer 23,4 1
- Bij kleine a (en dus grote b), bijvoorbeeld $a = 1,55$ en $\frac{b}{a} = 2,5$, is de minimale dikte kleiner 3

Opmerking

Als alleen dikten zijn berekend voor vierkante ruiten en ruiten met weinig verschil in a en b (waaruit een andere conclusie wordt getrokken), ten hoogste 4 scorepunten voor deze vraag toekennen.

4 maximumscore 5

- $q = 40$ 1
- $\beta = 0,720$ 1
- De vergelijking $22 = 0,447 \cdot 0,720 \cdot a \cdot 40$ 1
- $a \approx 1,71$ 1
- b is dan ongeveer 2,73 1

D Bouwpakketten

1 maximumscore 4

- Er zijn zes samenstellingen te maken van 300 cm 1
- Een toelichting, bijvoorbeeld in de vorm van een tabel zoals onderstaand 3

Breedtes diverse kastdelen					Totale breedte
60	60	60	60	60	300
60	60	60	120		300
60	120	120			300
60	80	80	80		300
60	60	80	100		300
60	60	90	90		300

Opmerkingen

Voor iedere niet genoemde of foute samenstelling een scorepunt in mindering brengen.

Als alleen het antwoord 'zes samenstellingen' of vergelijkbaar zonder toelichting gegeven wordt, geen scorepunten voor deze vraag toekennen.

2 maximumscore 6

- Een hoogte van 200 cm kan met 2 maal 45 en 2 maal 55 of met 1 maal 35 en 3 maal 55 1
- In de breedte: bij 60, 60, 80, 100 zijn er $2 \times \binom{4}{2} = 2 \times 6 = 12$ mogelijke breedte-indelingen 2
- In de hoogte: bij 45, 45, 55, 55 zijn er 6 mogelijke hoogte-indelingen en bij 35, 55, 55, 55 zijn er 4 mogelijke hoogte-indelingen. Dat zijn er in totaal 10 2
- Het totaal aantal indelingen is dan $12 \times 10 = 120$ 1

3 maximumscore 3

- Het aantal mogelijkheden is $3 \times 3 \times 3 \times (1 + 3 + 21)$ 2
- Het aantal mogelijkheden is $(27 \times 25 =) 675$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

E Bestrating

- 1 **maximumscore 3**
- Het grote vierkant heeft zijden, bestaand uit tweemaal de zijde van een vierkant en eenmaal de breedte van een rechthoek: $2 \cdot w + 1 \cdot k = 2w+k$ 1
 - De oppervlakte is dan $O = (2w + k)(2w + k) = (2w + k)^2$ 2
- 2 **maximumscore 6**
- Het Waalformaatgedeelte bestaat uit 4 dezelfde vierkanten met zijde w en een kleiner vierkant met zijde k 1
 - De oppervlakte daarvan is dus $O_W = 4 \cdot w \cdot w + 1 \cdot k \cdot k = 4w^2 + k^2$ 1
 - Het Keiformaatgedeelte: 4 dezelfde rechthoeken met zijden w en k 1
 - De oppervlakte daarvan is $O_K = 4 \cdot w \cdot k = 4wk$ 1
 - Het totaal is dan $O_W + O_K = 4w^2 + k^2 + 4wk$ 1
 - Uitwerken van formule van de vorige vraag levert $O = (2w + k)^2 = 4w^2 + 4wk + k^2 = 4w^2 + k^2 + 4wk (= O_W + O_K)$ 1
- 3 **maximumscore 4**
- In de formule invullen van, bijvoorbeeld $w = 1$ en $k = 0$ 1
 - Bijbehorende waarde van K : 300 (euro) 1
 - Bijbehorende terrasoppervlakte: 4 m² 1
 - De kosten per m²: $(\frac{300}{4} =) 75$ euro 1
- 4 **maximumscore 4**
- De nieuwe eis komt overeen met $k = \frac{1}{2}w$ 1
 - Invullen hiervan in $K = 300w^2 + 175wk + 75k^2$:

$$K = 300w^2 + 175w \cdot \frac{1}{2}w + 75 \cdot (\frac{1}{2}w)^2$$
 1
 - Herleiden tot $K = 300w^2 + 87,5w^2 + 18,75w^2$ 1
 - Herleiden tot $K = 406,25 \cdot w^2$ 1
- 5 **maximumscore 6**
- Er geldt nu: $406,25 \cdot w^2 = 10500$ 1
 - Beschrijven hoe deze vergelijking (met de GR of algebraïsch) kan worden opgelost 1
 - $w \approx 5,08$ 1
 - Uit $w = 5,08$ volgt dat $k = 2,54$ 1
 - De zijde van het terras is $2 \times 5,08 + 2,54 = 12,7$ (m) 1
 - De oppervlakte van het terras is $(12,7^2 \approx) 161$ (m²) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

F CBS-cijfers

1 maximumscore 3

- Procentuele groei $\frac{\text{nieuw} - \text{oud}}{\text{oud}} \times 100\% = \frac{4 - 2,8}{2,8} \times 100\%$ 2
- Dit levert 43% (of nauwkeuriger) (en dat is groter dan 40%) 1

2 maximumscore 5

- Een lineair verband heeft de vorm $A = at + b$ (met t in jaren en $t = 0$ bijvoorbeeld in 2007) 1
- $a = 0,6$ en $b = 2,8$ 1
- $A = 0,6t + 2,8$ 1
- In 2020: $t = 13$ 1
- Het aandeel duurzame energie is dan $0,6 \cdot 13 + 2,8 = 10,6\%$ 1

3 maximumscore 6

- Een exponentieel verband heeft de vorm $A = b \cdot g^t$ (met t in jaren en $t = 0$ bijvoorbeeld in 2007) 1
- In 2 jaar is de groeifactor 1,4 1
- Groeifactor per jaar: $g = 1,4^{0,5} \approx 1,183$ 1
- $b = 2,8$ 1
- $A = 2,8 \cdot 1,183^t$ 1
- Het aandeel duurzame energie in 2020 is $2,8 \cdot 1,183^{13} = 24,9\%$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

G Mastermind

- 1 **maximumscore 3**
- Er zijn 4 posities en 6 kleuren die elk maar ten hoogste 1 keer voorkomen 1
 - Het aantal mogelijkheden: $6 \times 5 \times 4 \times 3$ of $\frac{6!}{(6-4)!}$ 1
 - Het antwoord: 360 1
- 2 **maximumscore 6**
- Uitschrijven van alle voor Esther toegestane mogelijkheden:
 G-B-Z-R; G-Z-B-R; G-R-Z-B;
 R-Z-G-B; R-B-Z-G; R-Z-B-G;
 Z-B-G-R; Z-R-B-G; Z-R-G-B 5
 - Antwoord: er zijn voor Esther nog 9 mogelijkheden 1
- of
- Er zijn $4! = 24$ volgordemogelijkheden 1
 - Daarbij is 1 mogelijkheid waarbij precies 4 pinnetjes in volgorde overeenstemmen met B-G-R-Z 1
 - Daarbij zijn geen mogelijkheden waarbij precies 3 pinnetjes in volgorde overeenstemmen met B-G-R-Z 1
 - Daarbij zijn $\binom{4}{2} = 6$ mogelijkheden waarbij precies 2 pinnetjes in volgorde overeenstemmen met B-G-R-Z 1
 - Daarbij zijn $\binom{4}{1} = 4$ mogelijkheden waarbij precies 1 pinnetje in volgorde overeenstemt met B-G-R-Z 1
 - Antwoord: $24 - 1 - 6 - 8 = 9$ mogelijkheden voor Esther 1
- Opmerking*
 Als bij een opsomming van de diverse mogelijkheden (de eerste antwoordvariant dus) een mogelijkheid niet of fout vermeld wordt, hiervoor steeds 1 scorepunt in mindering brengen met een maximum van 5 scorepunten.
- 3 **maximumscore 3**
- Er zijn 4 posities en 6 kleuren 1
 - Het aantal mogelijkheden: 6^4 1
 - Het antwoord: 1296 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

4 **maximumscore 4**

- Als het rode pinnetje op de goede plek zou staan, dan moet het blauwe pinnetje op de plek staan waar nu een van de twee gele pinnetjes staat 1
- Op de plek waar nu dat andere gele pinnetje staat, kan dan alleen nog maar een geel pinnetje komen 1
- Dan zouden er nu dus al 2 pinnetjes op de goede plek staan en dat kan niet 1
- In het geval dat het blauwe pinnetje op de goede plek zou staan, kan een soortgelijke redenering gehanteerd worden dus ook dat kan niet 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

H Noordpoolijs

1 maximumscore 3

- Grootste ijsoppervlak: 16,5 (of nauwkeuriger),
kleinste ijsoppervlak: 14,5 (of nauwkeuriger) 1
- De procentuele afname is daarmee $\frac{14,5-16,5}{16,5} \times 100\%$ 1
- Percentage in de kop: 12 (of nauwkeuriger) 1

Opmerking

Als een kandidaat percentages bij andere jaartallen heeft afgelezen, ten hoogste 1 scorepunt voor deze vraag toekennen.

2 maximumscore 4

- De gemiddelde jaarlijkse verandering: $\frac{14,5-16,5}{2006-1979}$ 2
- Dat leidt tot $-0,07$ (of nauwkeuriger) 1
- De gemiddelde jaarlijkse afname is daarmee $0,07 \text{ km}^2$ 1

3 maximumscore 6

- Aflezen van twee punten op de trendlijn, bijvoorbeeld (2 (namelijk 1980); 16,2) en (26 (namelijk 2004); 15,2) 1
- Richtingscoëfficiënt: $\frac{15,2-16,2}{26-2}$ of $\frac{15,2-16,2}{2004-1980}$ 1
- Richtingscoëfficiënt is $-0,04$ (of nauwkeuriger) 1
- $b = 16,3$ (of nauwkeuriger) (dus formule $Opp = -0,04t + 16,2$) 1
- De vergelijking $-0,04t + 16,3 = 0$ leidt tot $t = 407,5$ 1
- Antwoord: in het jaar 2386 1

4 maximumscore 2

Een antwoord als

- Ze zullen dit deel van de grafiek bekijken omdat in deze jaren het ijsoppervlak bijna niet afgenomen is 2
- of
- Als je hier een trendlijn zou maken, dan zou deze bijna horizontaal lopen 2

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

I China's defensie-uitgaven

1	maximumscore 7	
	• Groeifactor hoge schatting 1,087	1
	• Exponentieel model hoge schatting opstellen $H = 37 \cdot 1,087^t$	1
	• Groeifactor lage schatting 1,087	1
	• Exponentieel lage schatting opstellen $L = 26 \cdot 1,087^t$	1
	• Verschilformule hoge – lage schatting opstellen	1
	• Verschil = 80	1
	• Oplossen vergelijking $t = 23,8$ en interpreteren naar jaartelling dus in 2018	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

J Brandstofverbruik

- 1 **maximumscore 7**
- Voor een vlucht van 9000 km non-stop is 36 gram per skm nodig 1
 - Dat is in totaal $524 \cdot 9000 \cdot 36 = 169\,776\,000$ gram brandstof 1
 - Als men, bijvoorbeeld, een tussenlanding op 4500 km kan maken, dan is er voor een dergelijke vlucht maar 33 gram per skm nodig 1
 - Dat is in totaal $524 \cdot 9000 \cdot 33 = 155\,628\,000$ gram brandstof 1
 - Het besparingspercentage is daarmee
$$\frac{169\,776\,000 - 155\,628\,000}{169\,776\,000} \cdot 100\%$$
 1
 - Dat is ongeveer 8,3% 1
 - Het antwoord: ja, men kan door tussenlandingen meer dan 5% besparen 1
- of
- Voor een vlucht van 9000 km non-stop is 36 gram per skm nodig 1
 - Als men, bijvoorbeeld, een tussenlanding op 4500 km kan maken, dan is er voor een dergelijke vlucht maar 33 gram per skm nodig 1
 - Omdat in beide gevallen dezelfde hoeveelheid stoelen en dezelfde totale afstand gehanteerd wordt, is de totale verbruikte brandstof bij tussenlanding $\frac{33}{36}$ e deel van de verbruikte brandstof bij non-stop 2
 - Het besparingspercentage is daarmee $\frac{36 - 33}{36} \cdot 100\%$ 1
 - Dat is ongeveer 8,3% 1
 - Het antwoord: ja, men kan door tussenlandingen meer dan 5% besparen 1

K Groene zone

1 maximumscore 6

- De tijd die nodig is om van 1 naar 2 te rijden, is de maximale tijd tussen het op groen springen van 1 en het op groen springen van 2 1
- Hetzelfde geldt voor de tijd die nodig is om van 2 naar 3 te rijden 1
- $50 \text{ km/u} = \frac{50000}{3600} \text{ m/s}$ 1
- Met een snelheid van 50 km/u doe je er $\frac{300}{\frac{50000}{3600}} = 21,6$ seconden over om van 1 naar 2 te rijden 1
- Met een snelheid van 50 km/u doe je er $\frac{400}{\frac{50000}{3600}} = 28,8$ seconden over om van 2 naar 3 te rijden 1
- Conclusie: 1 springt op groen; (hoogstens) 21,6 seconden later springt 2 op groen en weer (hoogstens) 28,8 seconden later springt 3 op groen 1