Voorbeeldexamenopgaven VWO

VWO A

Voorbeeldexamenopgaven

Hier treft u een aantal voorbeeldexamenopgaven aan die op het niveau van eindexamenopgaven zijn geformuleerd. Het zijn bestaande 'oude' examenopgaven, bewerkingen van bestaande opgaven en ook compleet nieuwe opgaven. In deze opgaven wordt een beeld geschetst van de wijze waarop de (sub)domeinen van het examenprogramma kunnen worden getoetst binnen contexten. Voor de goede orde: deze verzameling opgaven moet niet gezien worden als een voorbeeldexamen: iedere opgave moet als een op zichzelf staande opgave gezien worden die in een examen voor zou kunnen komen. Om te illustreren hoe een examen eruit zou kunnen zien, verschijnt op korte termijn een voorbeeldexamen. In dit voorbeeldexamen zullen overigens ook opgaven (al dan niet aangepast) voor kunnen komen die in de voorliggende verzameling opgaven voorkomen.

Verder wijzen we er met nadruk op dat ook bij vwo wiskunde A een nieuw type opgaven onderdeel uitmaakt van deze verzameling, de zogenoemde korte onderzoeksopgave. Dit type opgave wordt als zodanig benoemd en is daarmee direct herkenbaar. In dit opgavetype wordt een context aangereikt waarover vervolgens slechts één vraag gesteld wordt. Die vraag is, dat is althans het streven, een vraag die direct uit de context voortvloeit maar niet onmiddellijk beantwoord kan worden. Een leerling zal, om tot beantwoording te komen, de context moeten analyseren in het licht van de vraagstelling, soms moeten overgaan tot modellering of abstrahering, soms moeten kiezen voor een logische redenering. Er moet kortgezegd een zelfstandige onderzoeksactiviteit plaatsvinden. De bijbehorende maximumscore is daarmee ook redelijk hoog te noemen. Denk daarbij aan een maximumscore van 6 à 9 scorepunten. Het meegeleverde antwoordmodel moet bij dit type opgaven ook wat rekkelijker gehanteerd worden dan bij de 'reguliere' opgaven, dit omdat de leerling hier veelal een grotere vrijheid heeft om tot een antwoord te komen. Bij correctie van dit type opgaven vertrouwen we nog meer dan gebruikelijk op de expertise van de corrector. In dit verband wijzen we als voorbeeld op opgave J. Bij de beantwoording van deze opgave zijn diverse formules mogelijk/denkbaar. Het streven van de constructeurs bij een dergelijke opgave is niet op voorhand alle mogelijke/denkbare antwoorden te bedenken.

In de tabel op de volgende pagina wordt aangegeven welke (sub)domeinen er in de vragen van deze set met opgaven aan de orde komen.

Het betreft de volgende opgaven:

	Opgave	Bron
A	Onnodig ingewikkeld?	gebaseerd op wiB1, vwo 2009, 2e tijdvak
B	Bezonning	gebaseerd op wiA, vwo 1991, 1e tijdvak
C	Economische cycli	nieuw
D	Wereldbevolking	nieuw
E	Koolstofdatering	nieuw
F	Verkeersdrempels	nieuw
G	Berlijnse klok	nieuw
H	Sluipwespen	gebaseerd op wiB, havo 2009, 2e tijdvak
Korte onderzoeksopgaven:		
I	Groenbelegging	gebaseerd op wiA, vwo 2007, 1e tijdvak
J	Productie en temperatuur	gebaseerd op wiA, vwo 1987, 2e tijdvak
K	Quadominos	nieuw
L	Electriciteit	gebaseerd op wiA1, vwo 2007, 2e tijdvak

Subdomeinen	opgaven met vragen												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	
A1 Algemene vaardigheden De kandidaat heeft kennis van de rol van wiskunde in de maatschappij, kan hierover gerichte informatie verzamelen en de resultaten communiceren met anderen.													
A2 Profielspecifieke vaardigheden De kandidaat kan een profielspecifieke probleemsituatie in wiskundige termen analyseren, oplossen en het resultaat naar de betrokken context terugvertalen.									1				
A3 Wiskundige vaardigheden De kandidaat beheerst de bij het examenprogramma passende rekenkundige, algebraïsche en deductieve vaardigheden en kan bewerkingen uitvoeren zonder ICT en waar nodig met ICT.				1 3 4	1 2 3 4 5						1		
B1 Algebra De kandidaat kan berekeningen uitvoeren met getallen en variabelen, daarbij gebruik maken van rekenkundige en algebraïsche basisbewerkingen en van het werken met haakjes, en beargumenteren waarom de gekozen aanpak werkt.	1				1 2 3 4 5							1	
B2 Telproblemen De kandidaat kan telproblemen structureren en schematiseren en dat gebruiken bij berekeningen en redeneringen							1 2 3				1		
C1 Functies De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, goniometrische functies, exponentiële functies en logaritmische functies de kenmerken in grafiek, tabel en formule herkennen en gebruiken.		1 2 3	1 2 3 4	1 2		1 3		1 3		1			
C2 Functies, grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden De kandidaat kan formules opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen, vergelijkingen en ongelijkheden oplossen met algebraïsche methoden zonder gebruik van ICT, en daar waar nodig met numerieke of grafische methoden met inzet ICT, en de uitkomst interpreteren in termen van de context.	3	4	3	3 4	1 4 5	2 4			1	1		1	
D1 Rijen De kandidaat kan het gedrag ven een rij herkennen, beschrijven en er berekeningen mee uitvoeren, in het bijzonder in het geval van rekenkundige en meetkundige rijen.			5	5									
D2 Helling De kandidaat kan het veranderingsgedrag van grafieken of functies relateren aan differentiequotiënten, toenamediagrammen en hellinggrafieken en daarbij een relatie leggen met de probleemsituatie. profielspecifieke probleem situaties.													
D3 Afgeleide De kandidaat kan van eerstegraadsfuncties, tweedegraadsfuncties, machtsfuncties, exponentiële functies en logaritmische functies de afgeleide bepalen, de rekenregels voor het differentiëren gebruiken en aan de hand van de afgeleide het veranderingsgedrag van een functie bestuderen.	2							2					

A. Onnodig ingewikkeld?

Een gezonde volwassene is 's morgens langer dan aan het einde van de dag. De Australische wetenschapper D. Burgess heeft dit verschijnsel onderzocht en publiceerde in 1999 de volgende formule voor de lengtefractie S:

$$S = \ln(-0,00216t + 2,7183)$$

Hierin is t het aantal uren nadat een persoon is opgestaan en S de verhouding tussen de lengte L van die persoon ten opzichte van zijn lengte L_0 bij het opstaan.

Dus $S = \dfrac{L}{L_0}$.

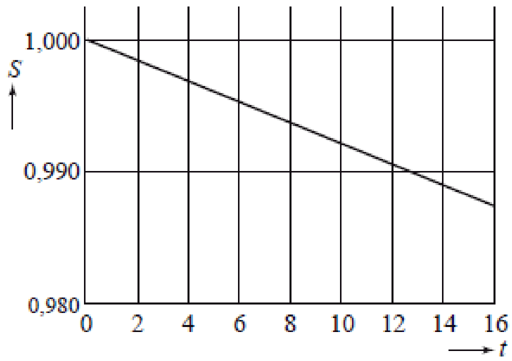
Meneer Jansen heeft als hij uit bed komt een lengte van 170,0 cm.

4p **1** Bereken na hoeveel tijd meneer Jansen volgens de formule 2,0 cm korter is geworden. Geef je antwoord in minuten nauwkeurig.

We gaan er in het vervolg van de opgave van uit dat een persoon na het opstaan 16 uur actief is, dus na 16 uur weer gaat slapen.

In figuur 1 is de grafiek van S als functie van t getekend. Deze grafiek lijkt zo op het eerste gezicht een rechte lijn, maar door de formule is bekend dat dit niet zo is.

figuur 1



6p **2** Stel de formule voor de afgeleide van S op en toon met behulp van deze afgeleide aan dat er bij S voor $0 \leq t \leq 16$ sprake is van daling. Onderzoek vervolgens of het hier om toenemende of afnemende daling gaat.

De grafiek van S valt nagenoeg samen met de rechte lijn door de punten $(0; 1,0000)$ en $(16; 0,9872)$. Is de formule van S met de natuurlijke logaritme, zoals gepubliceerd door de Australische wetenschapper, niet onnodig ingewikkeld? We zouden voor S ook gewoon een lineaire functie van t kunnen nemen.
We vergelijken daarom de formule $S = \ln(-0,00216t + 2,7183)$ met de formule $S = -0,0008t + 1,0000$ die hoort bij de rechte lijn door de punten $(0; 1,0000)$ en $(16; 0,9872)$. Om de twee formules met elkaar te vergelijken, wordt de verschilformule $V = \ln(-0,00216t + 2,7183) - (-0,0008t + 1,0000)$ opgesteld.

We nemen weer meneer Jansen, met een lengte van 170,0 cm bij het opstaan, als voorbeeld. Met behulp van V kun je op elk tijdstip t (met $0 \leq t \leq 16$) het verschil tussen de uitkomsten van beide formules bekijken.

4p **3** Bereken de maximale waarde van dit verschil.

B. Bezonning

Bij het ontwerpen van gebouwen besteedt men aandacht aan de mogelijke bezonning. Daarbij gaat men uit van een altijd wolkenloze hemel. In deze opgave beperken we ons tot gebouwen met rechte verticale gevels die niet in de schaduw van andere gebouwen staan. Verder gaan we uit van een jaar met 365 dagen. In tabel 1 is af te lezen hoeveel dagen elke kalendermaand telt.

tabel 1

maand	aantal dagen	maand	aantal dagen	maand	aantal dagen
januari	31	mei	31	september	30
februari	28	juni	30	oktober	31
maart	31	juli	31	november	30
april	30	augustus	31	december	31

In de figuur op de uitwerkbijlage is het dagelijks aantal uren zonneschijn B bij een altijd wolkenloze hemel uitgezet tegen het nummer van de dag n; hierbij geldt $n = 1$ voor 1 januari. De andere grafiek $B\text{-}noord$ speelt verderop pas een rol.

Voor B geldt de formule $B = 12,3 + 4,6 \cdot \sin(0,0172 \cdot (n - 80))$

Op 30 januari komt de zon op om 8:27u.

4p **1** Bereken met behulp van de formule het tijdstip waarop de zon op 30 januari onder gaat in minuten nauwkeurig.

4p **2** Toon door berekening aan dat 13 april de eerste dag van het jaar is dat de zon langer dan 14 uur schijnt.

Er is een groot verschil tussen het maximale en het minimale dagelijkse aantal uren zonneschijn.

3p **3** Bereken aan de hand van de formule voor B dit verschil in minuten nauwkeurig.

Gevels aan weerszijden van een rechthoekig gebouw kunnen niet tegelijkertijd door de zon beschenen worden. Ook is het zo dat, àls de zon schijnt, òf de noord-gevel òf de zuid-gevel zonlicht ontvangt[1].

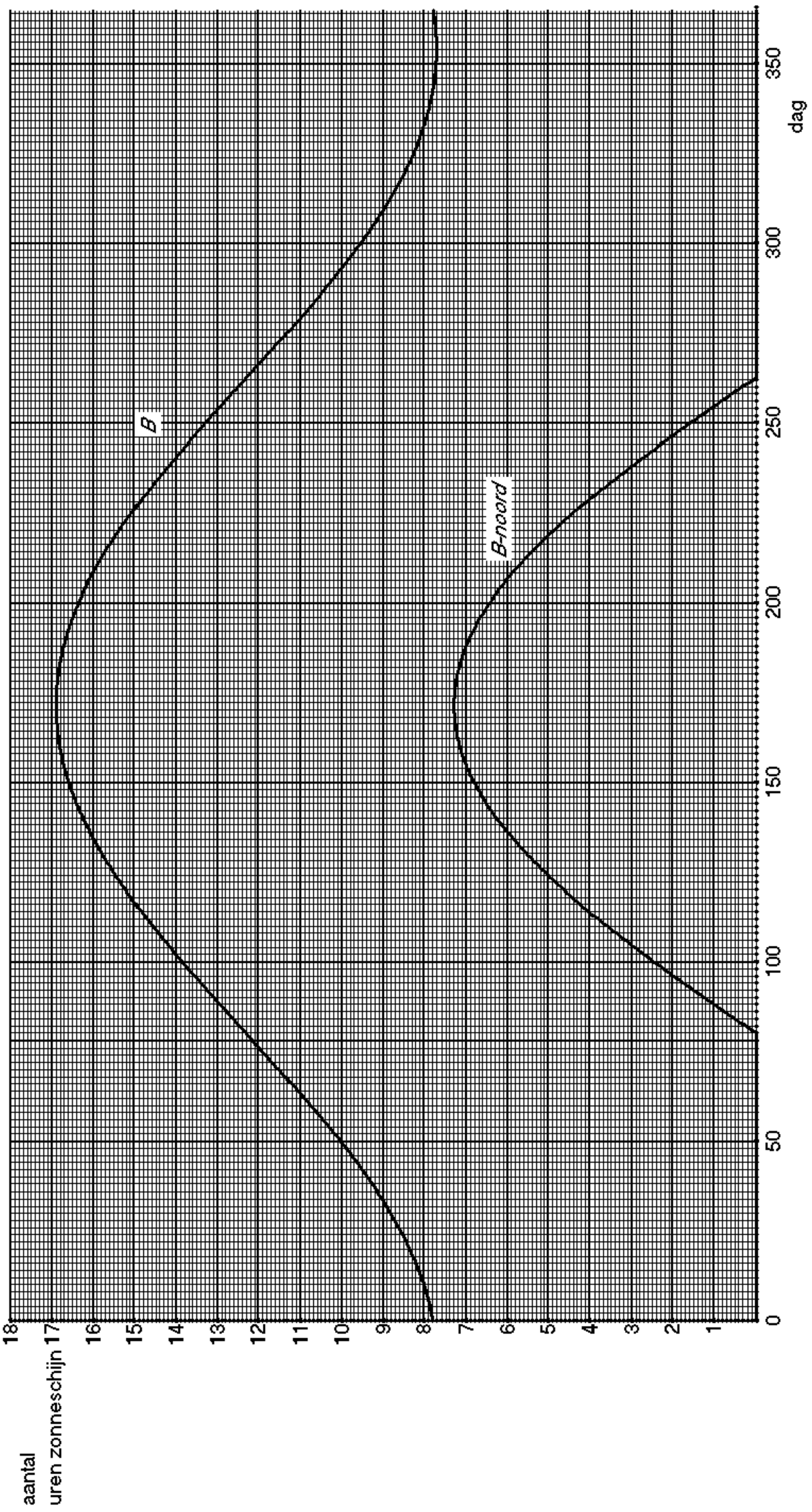
In de grafiek op de bijlage is ook het dagelijks aantal bezonningsuren voor een noord-gevel uitgezet; zie de grafiek $B\text{-}noord$. Uit deze grafiek blijkt dat een noord-gevel slechts een gedeelte van het jaar beschenen wordt.

4p **4** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek $B\text{-}zuid$ voor het dagelijks aantal bezonningsuren voor een zuid-gevel.

---

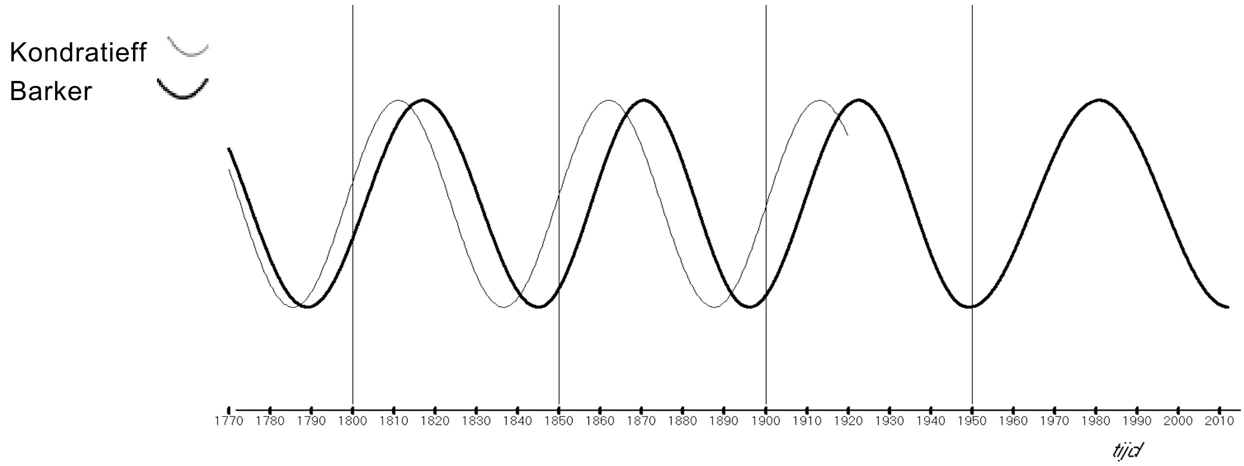
[1] Uiteraard geldt zoiets ook voor oost- en westgevel maar dat is hier niet van belang.

UITWERKBIJLAGE BIJ BEZONNING



Golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker
In de economie komen vaak golfbewegingen voor: het gaat afwisselend beter en slechter met de economie. Economen proberen deze golfbewegingen te analyseren, onder andere om een volgende economische crisis te kunnen voorspellen. In november 2010 stond hierover een artikel in dagblad *Trouw*. In figuur 1, gebaseerd op dit artikel, zijn twee verschillende golfbewegingen te zien. De golfbewegingen staan ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



1800	1850	1900
Kondratieff I	Kondratieff II	Kondratieff II
stoommachine	spoorwegen	electriciteit
katoen	staal	chemie

De Russische econoom Kondratieff presenteerde rond 1920 de theorie dat er in de (kapitalistische) wereldeconomie golven of cycli voorkomen met een periode tussen de 50 en 60 jaar: na grote technische vernieuwingen leeft de economie steeds op, om een aantal jaren later weer in een crisis of slechte tijd te belanden.
In figuur 1 is onder andere de golfbeweging volgens Kondratieff getekend tot 1920. Als je deze golfbeweging met dezelfde vaste periode ook na 1920 voortzet, wordt de crisis van 2009 hiermee niet goed voorspeld.

4p **1** Laat met een redenering gebaseerd op figuur 1 zien dat 2009 volgens Kondratieff niet in een periode van economische neergang zit.

De Amerikaanse beursanalist Barker gaat uit van een iets andere golfbeweging. Ook de golfbeweging volgens Barker is in figuur 1 getekend. Vanaf het dieptepunt in 1949 heeft de golfbeweging volgens Barker een periode die constant is.

In figuur 1 is te zien dat de golfbewegingen volgens Kondratieff en Barker steeds meer van elkaar gaan verschillen. In bepaalde perioden laten de beide grafieken zelfs een tegengestelde beweging van de economie zien: de grafiek volgens Barker stijgt, terwijl die van Kondratieff daalt of andersom.

4p **2** Onderzoek met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage in welke perioden tussen 1950 en 2050 de grafieken van Kondratieff en Barker een tegengestelde beweging van de economie laten zien.

De golfbeweging volgens Barker kan vanaf het dieptepunt in 1949 benaderd worden met de formule:

$$B = \sin(\tfrac{2\pi}{63}(t - 1965)) \text{ met } t \text{ het jaartal}$$

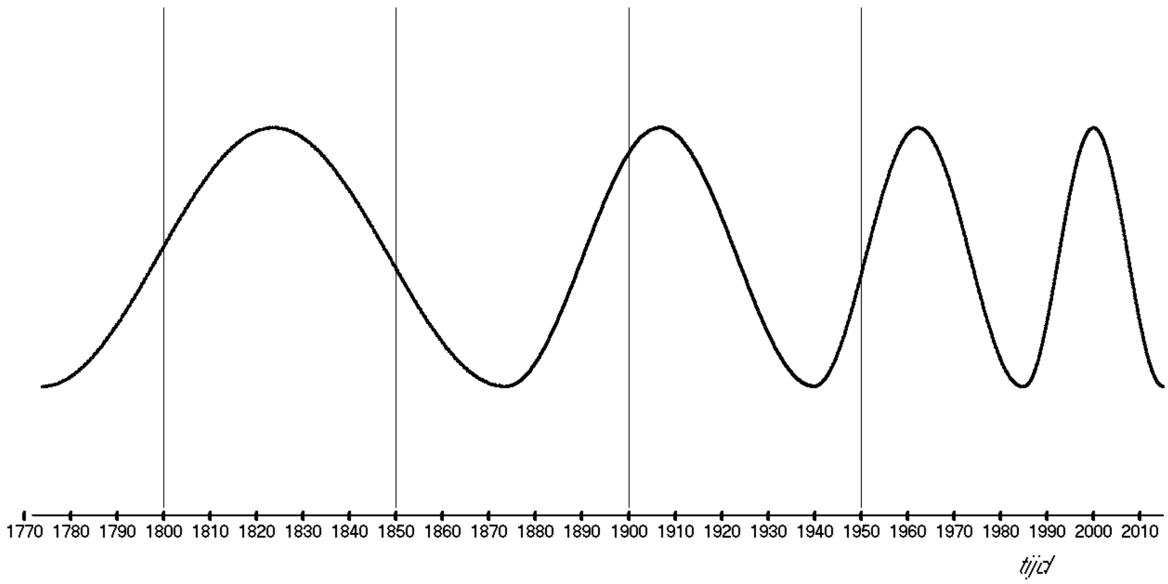
Omdat we hier alleen het stijgen en dalen van de golfbeweging bekijken, doet het er niet toe welke evenwichtsstand en welke amplitude we kiezen. In deze formule is gekozen voor evenwichtsstand 0 en amplitude 1.
Voor de golfbeweging volgens Kondratieff kan een soortgelijke formule opgesteld worden.

4p **3** Stel een formule voor de golfbeweging volgens Kondratieff op.

Golfbeweging volgens Smihula

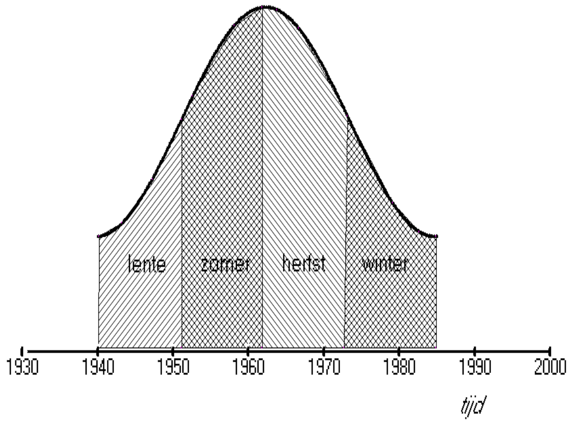
In figuur 2 is een derde grafiek getekend: de Slowaakse onderzoeker Smihula ging ook uit van golfbewegingen in de economie, maar volgens hem wordt de periode van deze golven steeds korter. Volgens Smihula begint en eindigt een golf bij een dieptepunt.

figuur 2



In onderstaande figuur 3 zie je de golf volgens Smihula tussen 1940 en 1985. De periode van deze golf is verdeeld in vier gelijke delen: deze delen worden respectievelijk lente, zomer, herfst en winter genoemd.

figuur 3



lente: invloedrijke innovatie trekt economie uit dal;
zomer: bloei van de economie tot oververhitting;
herfst: economie koelt af, koersen stijgen, inflatie daalt, zeepbel opgebouwd;
winter: zeepbel knapt, economische crisis

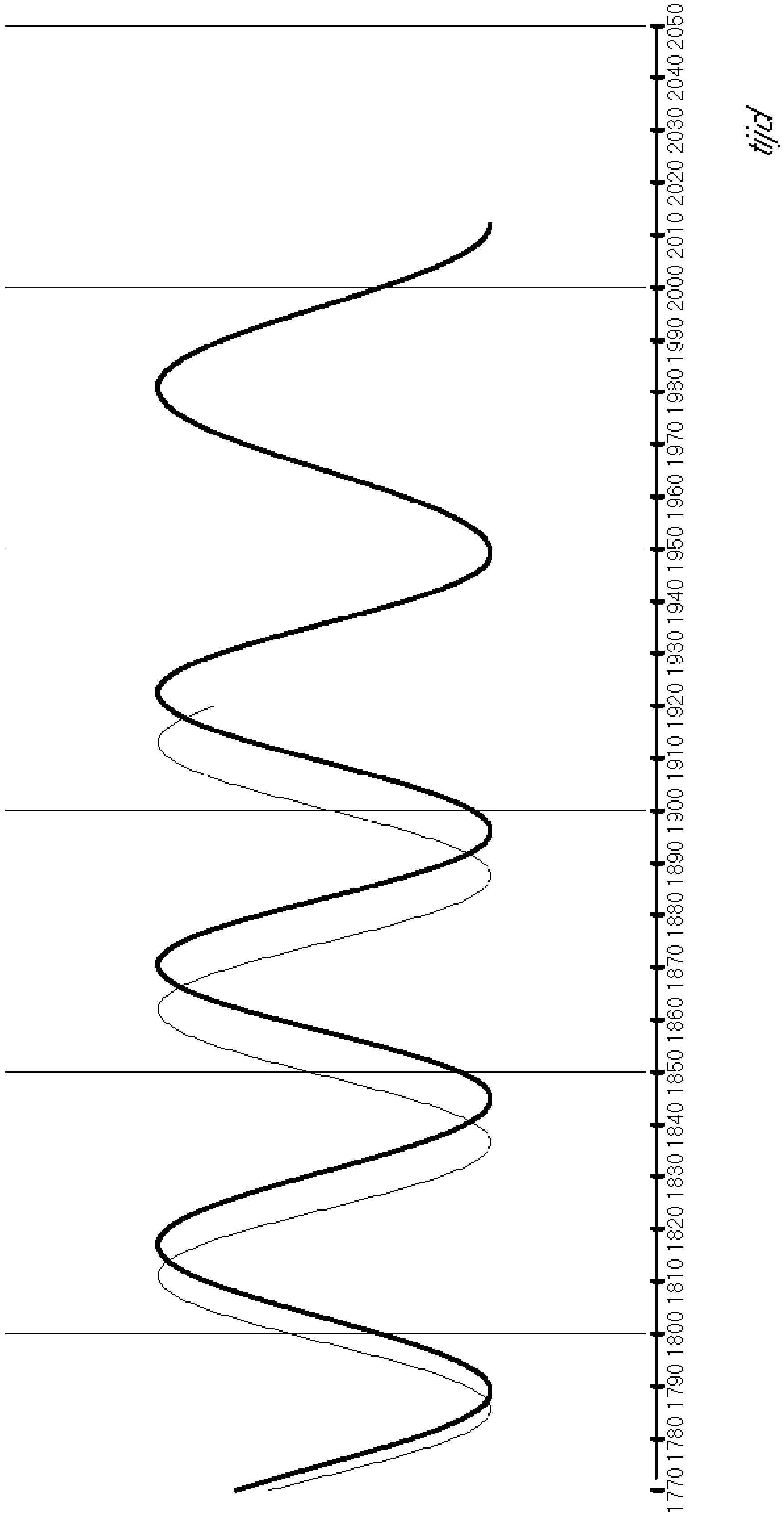
De volgende golf volgens Smihula loopt van 1985 tot 2015. De periode van deze golf is tweederde van de periode van de vorige golf. Neem aan dat dit zich na 2015 zo voortzet, dus dat elke nieuwe golf een periode heeft die tweederde is van de vorige.

4p **4** Bereken in welk “seizoen” (lente, zomer, herfst, winter) het jaar 2040 volgens Smihula zal vallen.

Als elke nieuwe golf een periode heeft die tweederde is van de vorige, worden de perioden op den duur erg kort. Het is de vraag of dit realistisch is.

6p **5** Bereken in welk jaar er volgens deze regelmaat voor het eerst een periode begint die korter is dan één jaar.

Uitwerkbijlage bij Economische cycli



D. Wereldbevolking

De wereldbevolking neemt steeds sneller toe. In tabel 1 zijn schattingen van de Verenigde Naties en andere instanties gecombineerd.

tabel 1

jaar	**N (in miljoenen)**
1650	500
1750	795
1850	1265
1900	1656
1950	2516
2000	6000

Wetenschappers proberen formules op te stellen die N uitdrukken als functie van de tijd t.
Een voor de hand liggend idee is om een exponentiële formule te gebruiken.
Een exponentiële formule die redelijk past bij de gegevens in tabel 1 is:

$N = 0,0101 \cdot 1,0065^t$ met t het jaartal

Voor de periode 1650-2000 geeft deze formule inderdaad aantallen die redelijk passen bij tabel 1, maar vanzelfsprekend zijn ze niet precies kloppend. Zo geeft de formule voor de jaren 1850 en 1950 aantallen die meer dan 20% boven de werkelijke aantallen liggen.

4p **1** Onderzoek voor welk van deze twee jaren de procentuele afwijking het grootst is.

Volgens sommige schattingen biedt de aarde ruimte en voedsel aan ten hoogste 20 miljard mensen.

3p **2** Onderzoek vanaf welk jaar de aarde volgens de formule te “klein” zal zijn.

Schoksgewijs exponentieel
Sommige wetenschappers vragen zich af hoeveel mensen er ooit op aarde geleefd hebben.
De Amerikaan Carl Haub schatte in 2002 dat er tot en met dat jaar ruim 100 miljard mensen op aarde geleefd hadden (of nog leefden). Hij ging daarbij uit van een rekenmodel met “schoksgewijs exponentiële toename” van de wereldbevolking. In tabel 2 zie je een gedeeltelijk overzicht van dit rekenmodel.

tabel 2

periode	groei wereldbevolking in miljoenen	groeipercentage per jaar
8000 voor Chr. tot 1 na Chr.	5-300	0,5119
1-1200	300-450	0,3379
1200-1650	450-500	0,2342
1650-1750	500-795	0,4648
1750-1850	795-1265	0,4656
1850-1900	1265-1656	0,5401
1900-1950	1656-2516	
1950-1995	2516-5760	1,8576
1995-2002	5760-6215	1,0920

In tabel 2 kun je onder andere aflezen dat volgens het model van Haub de wereldbevolking in de periode 1850-1900 jaarlijks toenam met 0,5401%, van 1265 miljoen tot 1656 miljoen. Hierbij wordt er dus van uit gegaan dat er binnen elke periode van de tabel een exponentiële groei plaatsvindt en de groeifactoren per periode kunnen verschillen.

4p **3** Bereken het ontbrekende groeipercentage in vier decimalen nauwkeurig.

Volgens het model van Haub werd de grens van 1 miljard mensen bereikt in de periode 1750-1850.

4p **4** Bereken in welk jaar dit volgens het model van Haub gebeurde.

Om een schatting te krijgen van het aantal mensen dat ooit op aarde geleefd heeft, gebruikte Haub voor elke periode in tabel 2 schattingen van de aantallen geboortes. We bekijken de aanpak van Haub voor de periode van 1995 tot en met 2002.
Voor die periode 1995-2002 kan de wereldbevolking bij benadering beschreven worden met de formule

$$N = 5760 \cdot 1{,}01092^t$$

Hierbij is t de tijd in jaren, waarbij $t = 0$ overeenkomt met het jaar 1995, en is N de wereldbevolking in miljoenen.
Volgens redelijke schattingen werden er in deze periode jaarlijks per 1000 mensen 23 baby´s geboren. Dat betekent dat er in deze periode in totaal bijna 1 miljard baby´s geboren werden.

4p **5** Bereken het totale aantal geboortes in deze periode in miljoenen nauwkeurig.

E. Koolstofdatering

Koolstofdatering is een manier om de ouderdom van organisch materiaal te bepalen, bijvoorbeeld van hout, plantenresten of botten. In levende organismen komt naast de gewone, niet-radioactieve vorm van koolstof C-12 ook het radioactieve C-14 voor en wel in een bepaalde verhouding tot C-12. Na de dood van het organisme zal de hoeveelheid C-14 door radioactief verval exponentieel afnemen. Door te meten hoeveel C-14 er nog over is, kan men de ouderdom van het organische materiaal bepalen.

Voor de afname van de hoeveelheid C-14 geldt de volgende formule:

$$Q = 100 \cdot g^t$$

Hierin is Q de relatieve huidige hoeveelheid C-14 (als percentage van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14), g de jaarlijkse groeifactor en t de ouderdom van het organische materiaal in jaren.
De halfwaardetijd, ook wel halveringstijd genoemd, van C-14 is 5730 jaar.
Hiermee kunnen we berekenen dat $g \approx 0,99988$.

3p **1** Bereken de waarde van g in zes decimalen nauwkeurig.

De methode van koolstofdatering is niet bruikbaar voor materiaal ouder dan 60000 jaar, omdat de hoeveelheid C-14 dan te klein is om te meten.

2p **2** Bereken hoeveel procent van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14 nog over is na 60000 jaar. Rond je antwoord af op honderdsten van procenten.

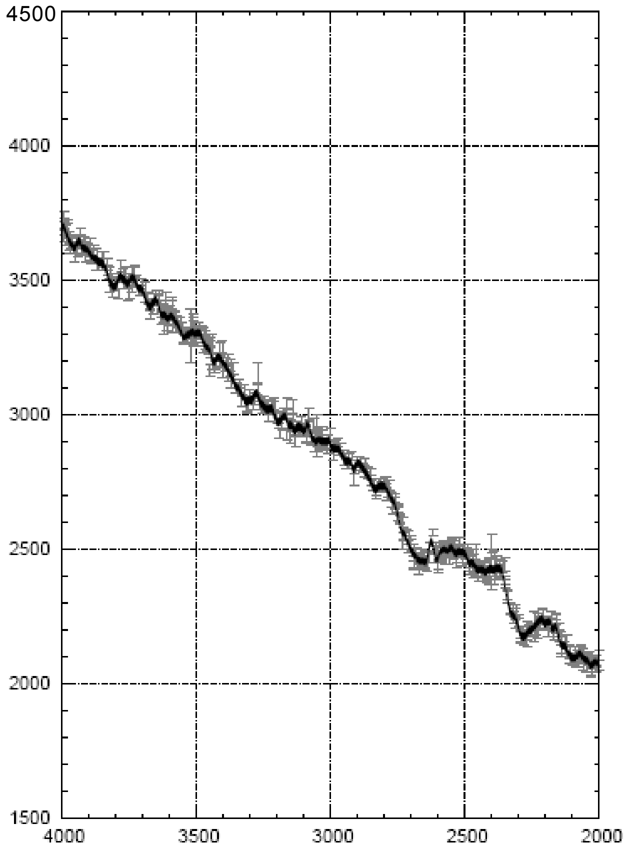
De formule $Q = 100 \cdot 0,99988^t$ kan, bij benadering, herschreven worden tot de volgende formule:

$$t = \frac{\ln(Q) - 4,6052}{-0,00012}$$

4p **3** Laat dit zien.

De ouderdom die men met de formule $t = \dfrac{\ln(Q) - 4,6052}{-0,00012}$ berekent, is niet de werkelijke ouderdom. In de volgende figuur zie je een gedeelte van de zogenoemde **calibratiecurve**, dat is een grafiek waarmee men de berekende ouderdom om kan zetten in de werkelijke ouderdom. Deze calibratiecurve is gemaakt door de hoeveelheid C-14 te bepalen in materiaal waarvan de ouderdom ook op een andere manier bekend was. De figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur



berekende ouderdom in jaren BP

werkelijke ouderdom in jaren BP

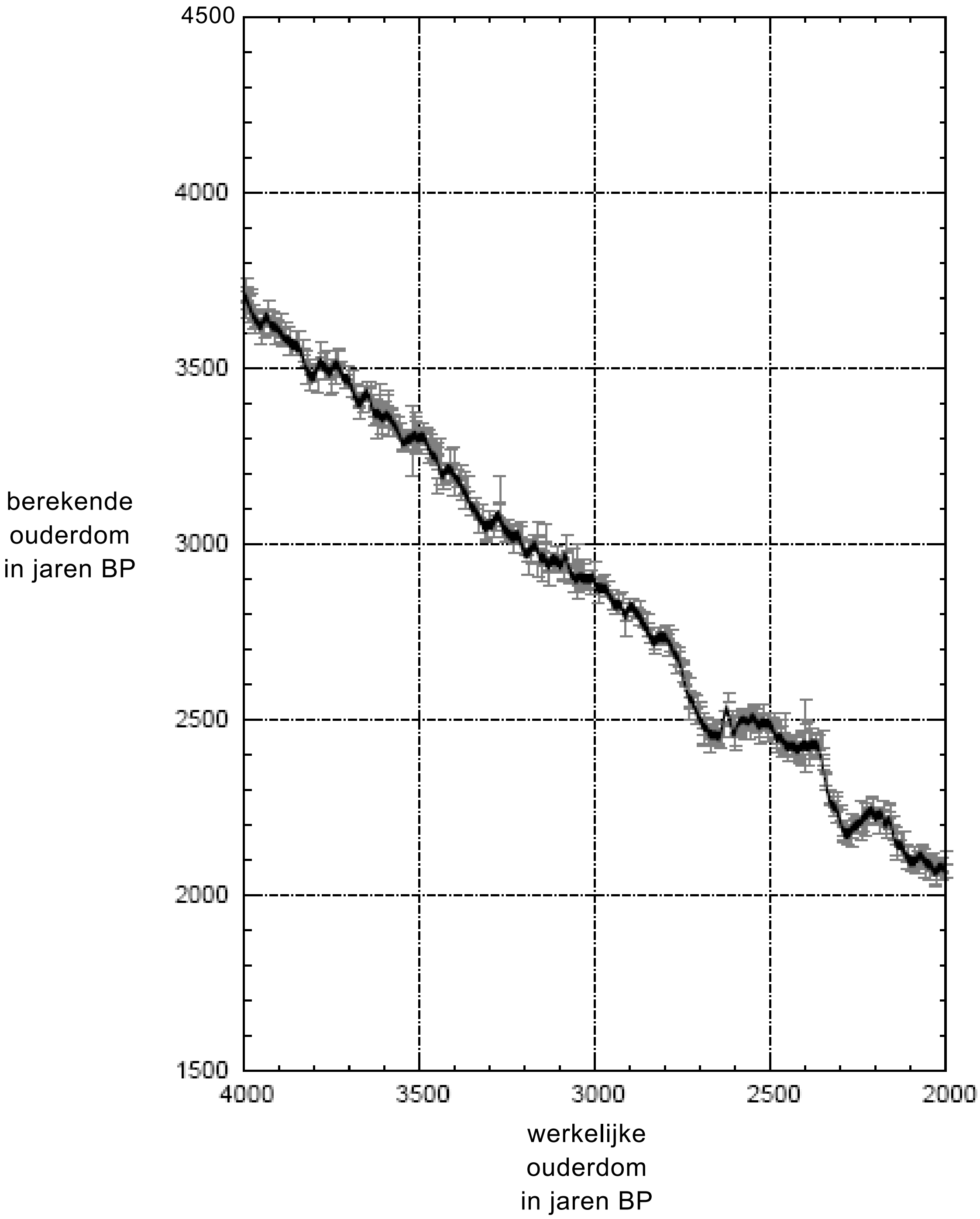
Langs de verticale as is de berekende ouderdom uitgezet. Deze wordt uitgedrukt in jaren BP, “Before Present” (vóór heden). Hiermee wordt in dit verband altijd bedoeld: het aantal jaren vóór 1950, zodat het niet nodig is te weten in welk jaar het onderzoek is gedaan. Langs de horizontale as staat de werkelijke ouderdom, ook in jaren BP, dus in jaren vóór 1950.
Bij Vlaardingen is een kano gevonden, gemaakt van een uitgeholde boomstam. Om de ouderdom van deze kano te bepalen wordt de hoeveelheid C-14 gemeten. Het blijkt dat er nog 73,19% over is van de oorspronkelijke hoeveelheid C-14.

4p **4** Bereken in welk jaar deze kano gemaakt is.

De curve van de figuur verloopt vooral rechtsonder grillig, doordat er voor deze periode veel materiaal beschikbaar was om de curve te maken. Voor het oudste deel van de calibratiecurve is niet zoveel materiaal beschikbaar. Voor een bepaald gedeelte heeft men alleen de volgende gegevens: bij een berekende ouderdom van 20 550 BP hoort een werkelijke ouderdom van 22 650 voor Chr. en bij een berekende ouderdom van 19925 BP hoort een werkelijke ouderdom van 21 925 voor Chr. Men neemt aan dat de calibratiecurve tussen deze twee punten volgens een rechte lijn verloopt.

4p **5** Bereken, uitgaande van die rechte lijn, de werkelijke ouderdom van een stuk hout waarvan de berekende ouderdom 20 100 BP is. Rond je antwoord af op tientallen jaren.

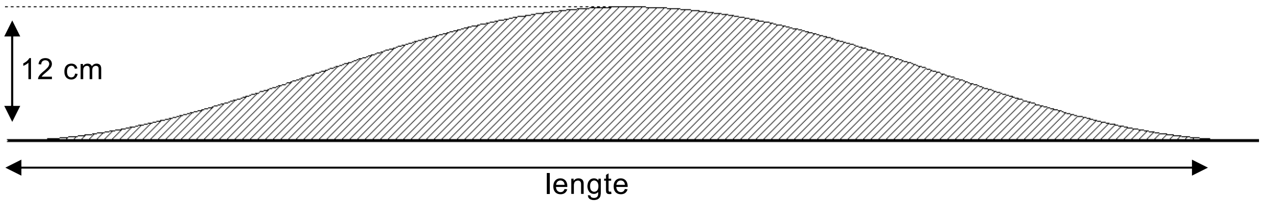
UITWERKBIJLAGE BIJ KOOLSTOFDATERING



F. Verkeersdrempels

In België zijn vorm en afmetingen van verkeersdrempels sinds 1983 wettelijk vastgelegd. Het zijaanzicht van een verkeersdrempel heeft een sinusvorm. Zie de onderstaande figuur.

figuur



Voor de verkeersdrempel van de figuur hierboven, die hoort bij een maximumsnelheid van 30 km/uur, is de volgende formule opgesteld:

$$h = 0,06 + 0,06\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi x - \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

Hierin is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

3p **1** Bereken hoeveel meter de lengte van deze drempel is.

Met de formule kun je berekenen over welke lengte deze drempel meer dan 10 cm hoog is.

4p **2** Bereken deze lengte in cm nauwkeurig.

De helling van de drempel is niet overal even groot.

4p **3** Hoeveel meter van het begin van de drempel ligt het eerste punt waar de drempel maximale helling heeft?

Een verkeersdrempel die hoort bij een maximumsnelheid van 60 km/uur is 12 meter lang en 14 cm hoog. Daarbij hoort een formule van de vorm:

$$h = a + b\sin\left(c(x - d)\right)$$

Ook hier is h de hoogte en x de horizontale afstand vanaf het (linker-)begin van de drempel, beide in meter.

3p **4** Hoe groot zijn a, b, c en d?

G. Berlijnse klok

In Berlijn staat op de Wittenbergplatz een bijzondere klok. Als je weet hoe het werkt, kun je er prima de tijd op aflezen. In figuur 1 staat een foto.

figuur 1

Het aflezen werkt als volgt:
- De 4 lampen in de bovenste balk staan elk voor 5 uur;
- De 4 lampen in de tweede balk staan elk voor 1 uur;
- De 11 lampen in de derde balk staan elk voor 5 minuten;
- De 4 lampen in de onderste balk staan elk voor 1 minuut.

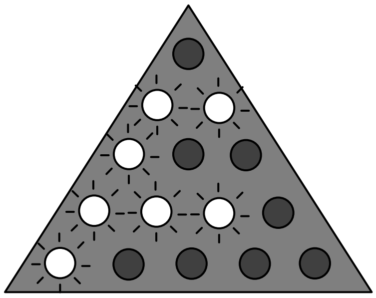
(De ronde lamp helemaal bovenaan gebruiken we hier niet.)
De lampen gaan van links naar rechts branden, telkens wanneer er een keer de bijbehorende tijdseenheid voorbij is, dus na één minuut gaat op de onderste balk de volgende lamp aan.
Wanneer er 5 minuten voorbij zijn, gaan de lampen in de onderste balk uit en gaat in de balk erboven de volgende lamp aan. Zo ook in de andere balken.
Op de klok in figuur 1 is het dus $(2 \times 5 + 4 \times 1)$ uur $+ (11 \times 5 + 2 \times 1)$ minuten, oftewel 14:57u.

Om middernacht is het 00:00u. Dan zijn alle lampen uit. Het is nu 13:48u.

4p **1** Bereken hoe vaak de meest rechtse lamp op de onderste balk sinds middernacht aan gegaan is.

Deze Berlijnse klok was voor Jörg Pretz aanleiding om op zoek te gaan naar een (wiskundig) mooiere klok. Hij kwam uit op de klok in figuur 2. Dit is een 12-uurs-klok.

figuur 2



De klok van figuur 2 werkt net zo als de Berlijnse klok, met kleine aanpassingen:
- De lamp in de bovenste rij staat voor 6 uur;
- De lampen in de tweede rij staan elk voor 2 uur;
- De lampen in de derde rij staan elk voor 30 minuten;
- De lampen in de vierde rij staan elk voor 6 minuten;
- De lampen in de onderste rij staan elk voor 1 minuut.

Ook op deze klok gaan de lampen van links naar rechts branden.
Op de klok in figuur 2 is het dus $2 \times 2 \text{ uur} + (1 \times 30 + 3 \times 6 + 1 \times 1)\text{ minuten}$, oftewel 04:49u.

In de klok in figuur 2 zie je 7 lampen branden.

4p **2** Onderzoek hoeveel tijdstippen er mogelijk zijn waarop er precies 2 lampen branden.

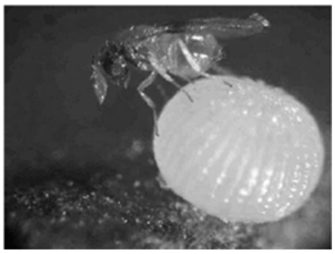
Je kunt je de vraag stellen hoe het komt dat deze klok kan werken.
Bij het beantwoorden van die vraag is het volgende van belang: met de onderste rij van 5 lampen zijn 6 mogelijke ‘minuut’-tijdstippen weer te geven: 00:00, 00:01, 00:02, 00:03, 00:04 en 00:05. Dat principe geldt voor elke rij.

5p **3** Toon door het berekenen van het aantal mogelijke ‘minuut’-tijdstippen aan dat je op deze manier met 5 rijen inderdaad precies een 12-uurs-klok kunt maken.

H. Sluipwespen

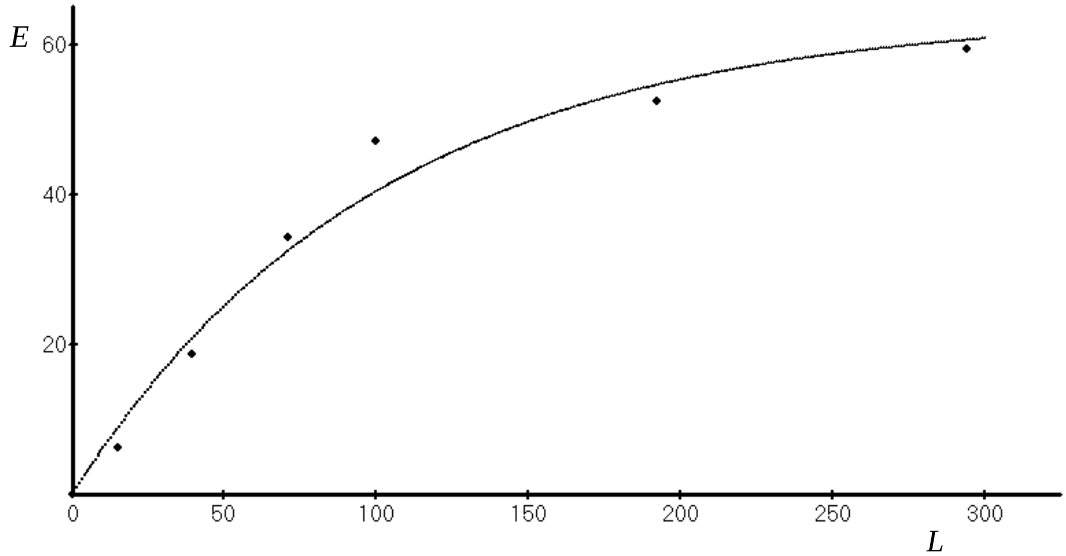
Larven kunnen grote schade toebrengen aan gewassen. Larven kunnen milieuvriendelijk bestreden worden met sluipwespen. Een sluipwesp legt een eitje in de larve waardoor de larve uiteindelijk doodgaat. Een onderzoeker wilde weten hoeveel larven één sluipwesp maximaal per dag kan bestrijden.

foto



Om dit te onderzoeken werd één sluipwesp in een grote afgesloten ruimte met larven gezet. Na één dag werd geteld hoeveel larven er in totaal in de ruimte waren. Dit aantal noemen we L. Ook werd geteld hoeveel larven er een eitje bevatten. Dit aantal wordt E genoemd. Het experiment werd zes maal uitgevoerd. De resultaten zijn als stippen te zien in de figuur.

figuur



Het verband tussen E en L kan redelijk worden benaderd door de volgende formule:

$$E = 64 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0,01L})$$

In de figuur zie je ook de grafiek die bij deze formule hoort. Uit de figuur valt af te lezen dat bij $L = 100$ het aantal larven met eitjes volgens de formule nogal afwijkt van het gemeten aantal larven met eitjes.

3p **1** Bereken met behulp van de formule bij $L = 100$ het verschil tussen het aantal larven met eitjes volgens de formule, afgerond op een geheel aantal larven, en het gemeten aantal larven met eitjes.

In de figuur is te zien dat het aantal larven met eitjes E steeds minder snel toeneemt als het totale aantal larven L toeneemt. Dit is ook in te zien met behulp van de afgeleide van E.

4p **2** Bepaal de afgeleide van E en toon daarmee aan dat het aantal larven met eitjes volgens de formule steeds minder snel toeneemt bij toenemend aantal larven.

De formule is een hulpmiddel om te schatten hoeveel larven maximaal per dag door één sluipwesp kunnen worden bestreden. Volgens de formule kan het aantal larven met eitjes E niet boven een bepaalde grenswaarde uitkomen.

3p **3** Geef deze grenswaarde. Licht je antwoord toe.

I. onderzoeksopgave: Groenbelegging

Beleggingsmaatschappijen zoeken naar steeds nieuwe manieren om geld te beleggen. Eén van die manieren is beleggen in bomen.
Over het beleggen in bomen schrijft een beleggingsmaatschappij in een reclamefolder het volgende:

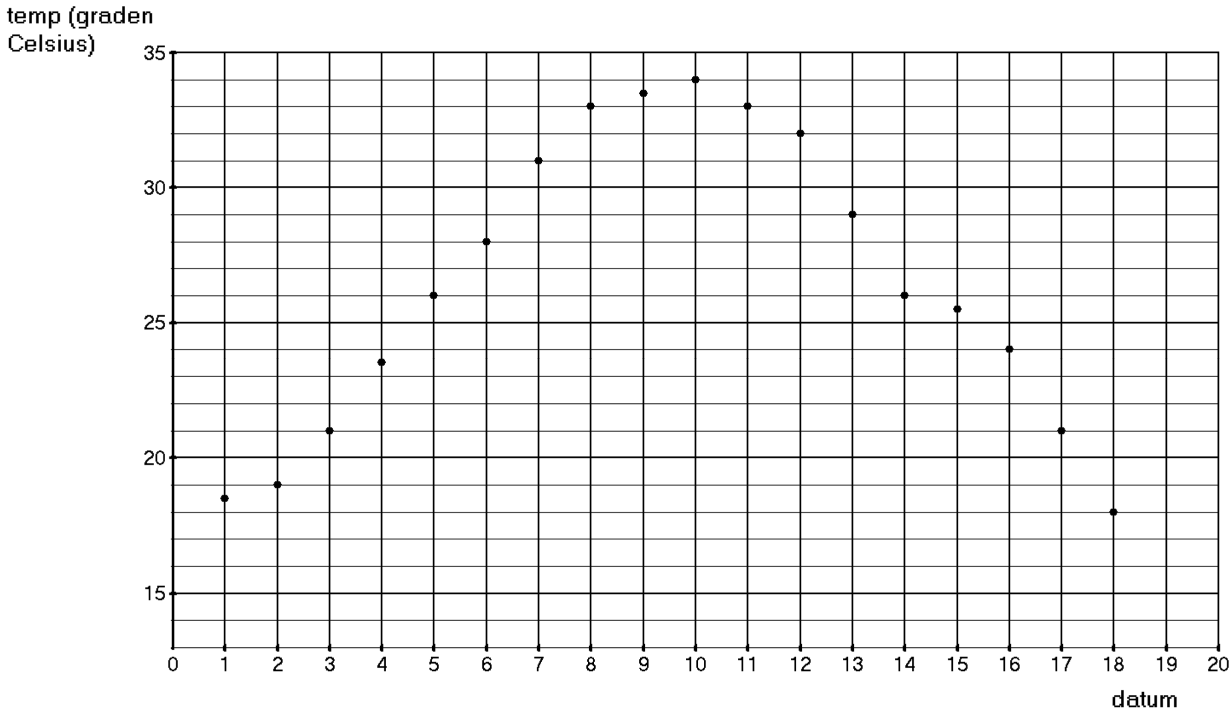
> Uw belegging groeit vanzelf.
> De Labironia is een duurzame houtsoort. De houtindustrie maakt veel gebruik van de Labironia en het is te verwachten dat de vraag naar Labironia in de komende jaren zal toenemen. Van het geld dat u belegt, worden een stuk grond en jonge boompjes gekocht. Het stuk grond is verdeeld in percelen en op elk perceel worden 960 boompjes geplant. Om een idee te krijgen van de te verwachten opbrengst, geven we u het volgende schema.
>
> – Na 8 jaar moeten 200 bomen van elk perceel worden gekapt. Dan hebben de bomen naar verwachting een lengte van 7 m en een stamdiameter van 10,8 cm.
> – Na 15 jaar moeten nog eens 300 bomen van elk perceel worden gekapt. Dan hebben de bomen naar verwachting een lengte van 12 m en een stamdiameter van 13 cm.
> – De eindkap volgt na 20 jaar. Dan worden van elk perceel de resterende 460 bomen gekapt. De stamdiameter van de bomen is dan toegenomen tot 16 cm en de lengte tot 15,5 m.
>
> De houtopbrengst wordt berekend met de formule $M = 0,16 \cdot D^2 \cdot L$. Hierin is M het aantal m^3 benutbaar hout, D de stamdiameter van de boom in meter en L de lengte van de boom in meter.
>
> U kunt deelnemen door een bedrag in te leggen van 5000 euro per perceel. U ontvangt dan in de komende twintig jaar de opbrengst van het op dat perceel geoogste hout. Wanneer we ervan uitgaan dat de houtprijs, die voor de Labironia momenteel 600 euro per m^3 bedraagt, in de komende jaren niet zal stijgen, is deze belegging de moeite waard. Zelfs als U de gelden die na 8 jaar en na 15 jaar vrijkomen in een oude sok bewaart (en dus niet wegzet op bijvoorbeeld een spaarrekening), is de opbrengst in totaal meer dan wanneer U de inleg twintig jaar lang op een spaarrekening met 8% rente per jaar zou hebben gezet.

7p **1** Onderzoek of deze laatste bewering klopt en bereken welk rentepercentage je op een spaarrekening zou moeten krijgen om na twintig jaar minstens een even hoge opbrengst te hebben als met deze groenbelegging.

J. onderzoeksopgave: Productie en temperatuur

Op een industrieterrein wordt elke dag de maximumtemperatuur gemeten. In onderstaande grafiek zijn de meetresultaten voor juni 2010 weergegeven.

grafiek



Een groot bedrijf op dit industrieterrein produceert materiaal. De productie van dit materiaal is afhankelijk van de buitentemperatuur. In onderstaande tabel kun je terugvinden hoeveel er per dag in diezelfde periode geproduceerd is (in tonnen).

tabel

dag	datum	productie	dag	datum	productie	dag	datum	productie
			ma	7 juni	1007	ma	14 juni	1012
di	1 juni	1032	di	8 juni	1004	di	15 juni	1017
wo	2 juni	1030	wo	9 juni	1002	wo	16 juni	1021
do	3 juni	1026	do	10 juni	1001	do	17 juni	1026
vr	4 juni	1022	vr	11 juni	1001	vr	18 juni	1029

Een medewerker van de afdeling planning wil het verband tussen de maximumtemperatuur T en de productie P bestuderen. Hij wil daarbij dit verband in een zo eenvoudig mogelijke en goed passende formule uitdrukken.

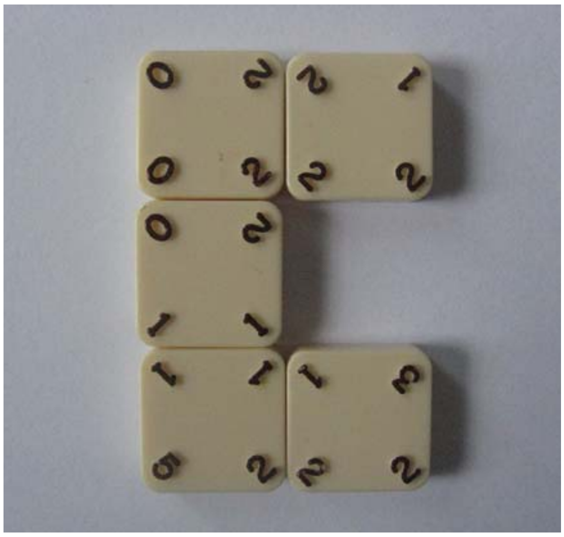
8p **1** Stel een dergelijke formule op en licht je antwoord toe.

K. onderzoeksopgave: Quadominos

Het spel Quadominos bestaat uit vierkante stenen. Zie foto 1. Op elke steen staan vier cijfers, één cijfer bij elke hoek. Dit cijfer kan zijn een 0, 1, 2, 3, 4 of 5. Doel van het spel is zoveel mogelijk stenen passend aan te leggen. In foto 2 zie je daar een voorbeeld van.

foto 1

foto 2



Alle stenen zijn verschillend. Alle mogelijke combinaties van cijfers komen voor, behalve één: er is geen steen met de cijfers 0, 2, 4 en 5.

Je kunt de stenen in vijf soorten verdelen:
- stenen met vier dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 3-3-3-3
- stenen met precies drie dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 3-3-3-4 in foto 1 (links)
- stenen met twee keer twee dezelfde cijfers, bijvoorbeeld 0-0-2-2 in foto 1
- stenen met twee dezelfde en daarnaast twee verschillende cijfers, bijvoorbeeld 1-1-0-2 in foto 1 (boven)
- stenen met vier verschillende cijfers, bijvoorbeeld 1-2-3-5 in foto 1 (boven)

.
Van elke combinatie van vier toegestane cijfers zit er in het spel slechts één steen. Er zit bijvoorbeeld dus maar precies één steen in met de cijfers 1-1-0-2.

8p **1** Onderzoek hoeveel stenen er in totaal zijn bij het spel Quadominos.

L. onderzoeksopgave: Elektriciteit

In november 2004 maakte energiebedrijf Essent de tarieven voor de levering van elektriciteit bekend voor het jaar 2005. Zie onderstaande tabel.

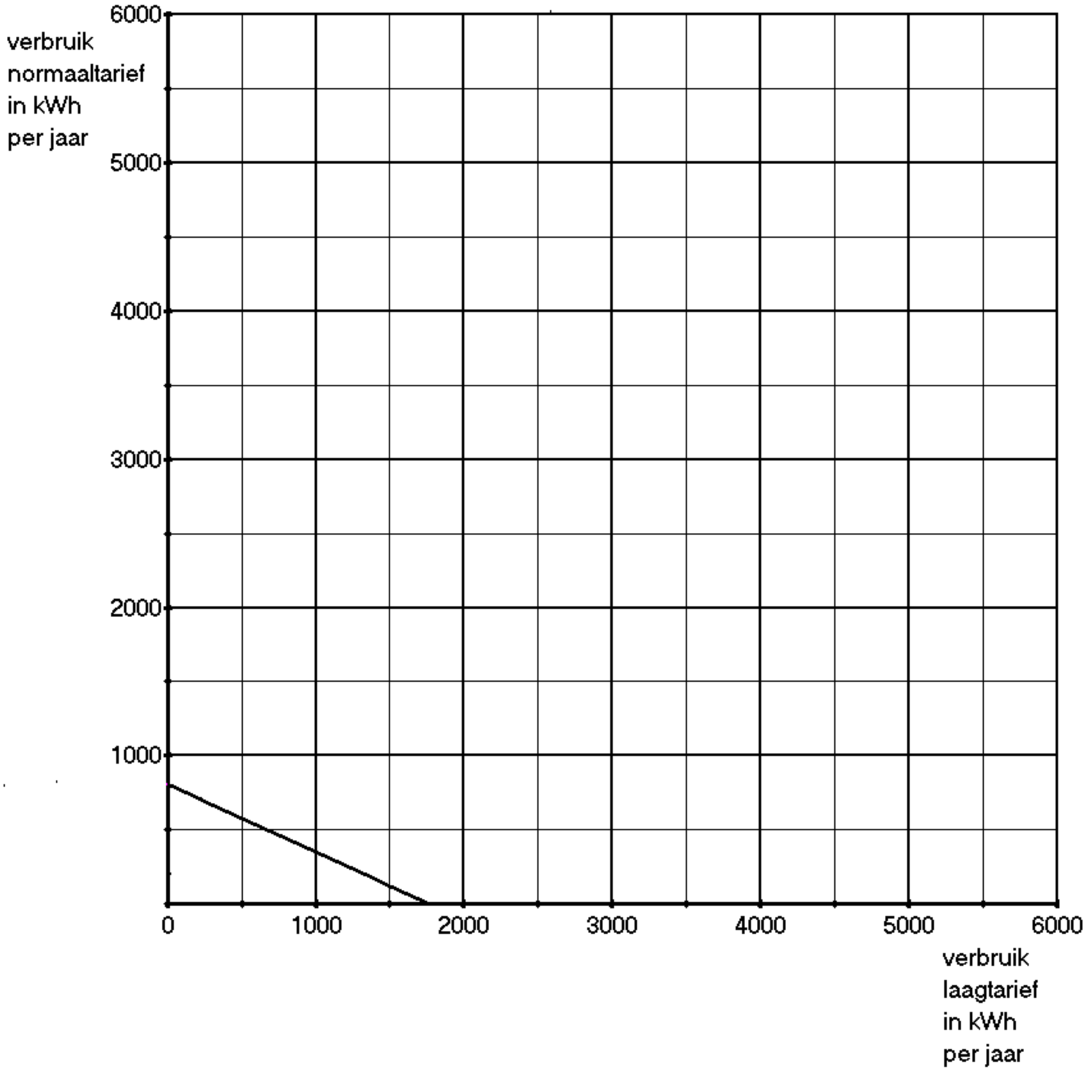
tabel
Elektriciteitstarieven 2005

	vaste kosten per jaar	**laagtarief kWh-prijs**	**normaaltarief kWh-prijs**
KeuzeTarief Budget	€ 0,00	€ 0,0520	€ 0,0970
KeuzeTarief Standaard	€ 17,85	€ 0,0419	€ 0,0749
KeuzeTarief Plus	€ 35,70	€ 0,0364	€ 0,0743

Zoals je kunt zien, kunnen klanten bij Essent kiezen uit drie tarieven.
Essent kent tarieven voor huishoudens die een elektriciteitsmeter gebruiken waarmee onderscheid wordt gemaakt tussen laagtarief en normaaltarief.
Het laagtarief wordt berekend voor elektriciteitsverbruik in het weekend en ’s nachts van 23:00 tot 7:00 uur, het normaaltarief op de andere tijden.
Alle bedragen zijn inclusief BTW.
Een huishouden kan kiezen uit een van de drie tarieven. Afhankelijk van het verbruik en de momenten waarop verbruikt wordt, is voor het ene huishouden het ene keuzetarief het voordeligste en voor het andere huishouden het andere.

Een energieadviseur maakt een voorlichtingsfolder om daarbij met een figuur duidelijk te maken bij welke combinaties van laag- en normaaltariefverbruik (op jaarbasis) welk keuzetarief het voordeligst is. Hij wil daarin gebieden aangeven waar een bepaald tarief het voordeligst is. Hij gebruikt daarvoor het assenstelsel op de uitwerkbijlage. Hij heeft daarop al een lijnstuk getekend. Op dat lijnstuk liggen alle punten waarbij keuzetarief Budget en keuzetarief Standaard precies even duur zijn.

7p **1** Geef in het assenstelsel op de uitwerkbijlage drie **gebieden** aan waarin telkens één van de drie keuzetarieven het voordeligst is. Licht je antwoord toe.


verbruik
normaaltarief
in kWh
per jaar
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
verbruik
laagtarief
in kWh
per jaar

Correctievoorschrift VWO

VWO A

A. Onnodig ingewikkeld?

1 maximumscore 4

- Uitgerekend moet worden het tijdstip t waarbij $S = \frac{168,0}{170,0}$ ($\approx 0,9882$) 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{168,0}{170,0} = \ln(-0,00216t + 2,7183)$ opgelost kan worden 1
- De oplossing van de vergelijking: $t \approx 14,73$ uur 1
- Het antwoord: na 884 minuten (ofwel 14 uur en 44 min.) (of nauwkeuriger) 1

2 maximumscore 6

- $S' = \frac{-0,00216}{-0,00216t + 2,7183}$ $\left(= \frac{0,00216}{0,00216t - 2,7183}\right)$ 2
- Met, bijvoorbeeld, een grafiek van S' duidelijk maken dat S' voor alle waarden van t negatief is 1
- Hieruit volgt dat S dalend is 1
- Aan de hand van (de grafiek van) S' valt in te zien dat S' voor toenemende t steeds kleiner wordt 1
- Het steeds kleiner worden van S' betekent vervolgens dat S toenemend daalt 1

3 maximumscore 4

- Beschrijven hoe het maximum van V met de GR gevonden kan worden 1
- Dit maximum is $2,9551 \cdot 10^{-5}$ 2
- Het maximale verschil voor de lengte van meneer Jansen is dus $170 \cdot 2,9551 \cdot 10^{-5} \approx 0,0050$ cm (of 0,005 cm) (of nauwkeuriger) 1

B. Bezonning

1 maximumscore 4

- Op 30 januari geldt: $n = 30$ — 1
- Als $n = 30$ dan geldt $B \approx 8{,}832$ — 1
- De bezonning is dan 8 uur en 50 minuten — 1
- Het antwoord: 17:17u — 1

2 maximumscore 4

- Op 13 april geldt: $n = 103$ — 1
- $B(103) > 14{,}07$ — 2
- $B(102) < 13{,}9994$ — 1

of

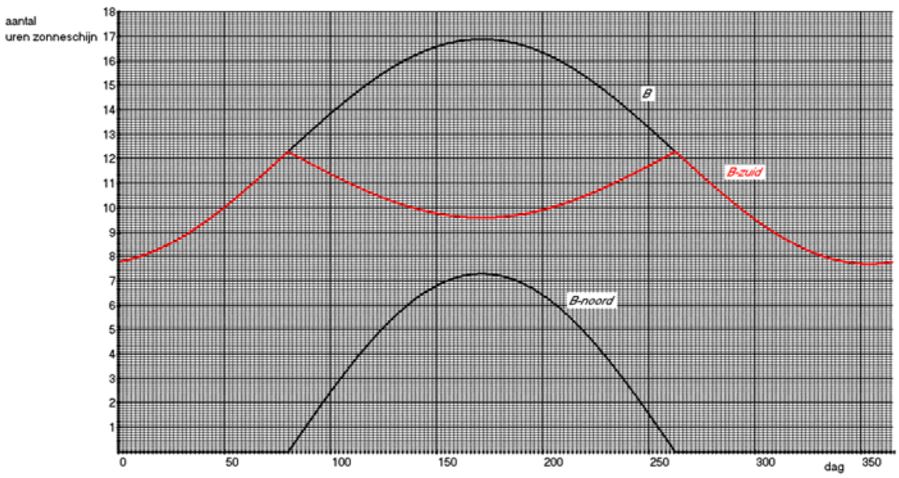
- De vergelijking $12{,}3 + 4{,}6 \cdot \sin(0{,}0172 \cdot (n - 80)) = 14$ moet worden opgelost — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost — 1
- De oplossing $n \approx 102{,}008$ (of nauwkeuriger) — 1
- De conclusie — 1

3 maximumscore 3

- Het maximum van B is, volgens de formule, $12{,}3 + 4{,}6$ — 1
- Het minimum van B is, volgens de formule, $12{,}3 - 4{,}6$ — 1
- Het verschil in bezonning is daarmee 9,2 uur en dat is 9 uur en 12 minuten — 1

4 maximumscore 4

- Het gebruik maken van *B-zuid* + *B-noord*= *B* — 1
- De tekening (zie onderstaand voorbeeld) — 3



Opmerking
Als de grafiek van B-zuid geen knikken vertoont, ten hoogste 3 punten toekennen voor vraag 4

C. Economische cycli

1 maximumscore 4

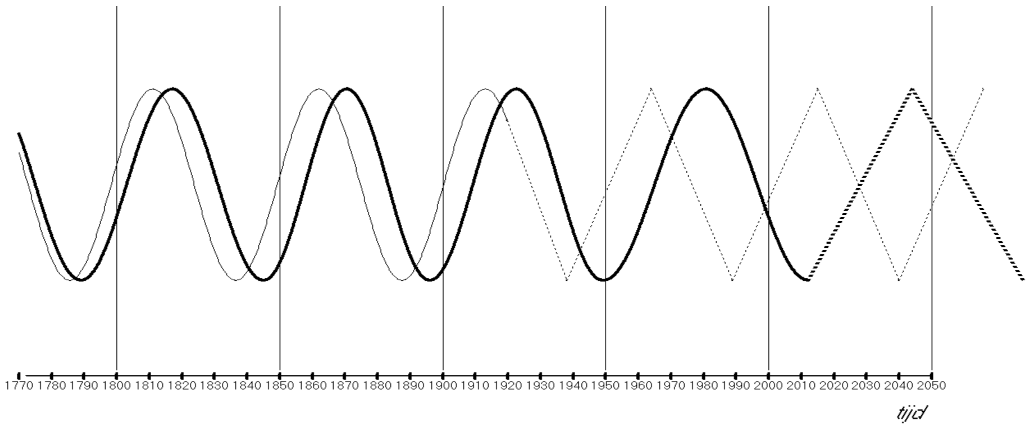
- Aflezen uit de figuur: de periode is ongeveer 51 jaar 1
- In $1913 + 2 \times 51 = 2015$ is er een maximum 1
- In 1989 (of 1990) is er een minimum 1
- Het crisisjaar 2009 ligt vlak voor de top, (dus ligt 2009 niet in een periode van economische neergang) 1

Opmerking
Voor de aflezingen mag bij deze en de volgende vraag een marge van 1 jaar gehanteerd worden.

2 maximumscore 4

- Tussen 1950 en 2050 heeft de golfbeweging volgens Barker maxima voor $t \approx 1981$ en $t \approx 2044$ en een minimum voor $t \approx 2012$ 1
- Tussen 1950 en 2050 heeft de golfbeweging volgens Kondratieff maxima voor $t \approx 1964$ en $t \approx 2015$ en minima voor $t \approx 1989$ en $t \approx 2040$ 1
- Een (rudimentaire) schets van beide grafieken (zie hieronder) of een toelichting 1
- Het antwoord: in de perioden 1964 tot 1981; 1989 tot 2012; 2015 tot 2040 en 2044 tot 2050 1

Voorbeeld van een schets



3 maximumscore 4

- Een periode van 51 jaar geeft $c = \frac{2\pi}{51}$ 1
- Een beginwaarde is bijvoorbeeld $1913 + 0,75 \times 51 \approx 1951$ 1
- Een juiste formule, bijvoorbeeld $K = \sin(\frac{2\pi}{51}(t - 1951))$ 2

4 maximumscore 4

- De twee volgende perioden duren 20 resp. 13,3 jaar 1
- 2040 valt in de periode van 2035 tot 2048 1
- Het verdelen van deze periode in vier delen 1
- Het antwoord: 2040 valt in de "zomer" 1

5 maximumscore 6

- De lengten van de perioden vormen een meetkundige rij met factor $\frac{2}{3}$ 1
- Een aanpak als: een tabel maken bij de formule $P = 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 1
- De 9$^{\text{e}}$ periode na 2015 is de eerste periode die korter is dan één jaar 1
- Aangeven dat de som van de eerste acht perioden na 2015 berekend moet worden 1
- Die som is 57,7 jaar (of nauwkeuriger) 1
- $2015 + 57{,}7 \approx 2072{,}7$, dus in het jaar 2072 (begint de 1$^{\text{e}}$ periode korter dan een jaar) 1

D. Wereldbevolking

1 maximumscore 4

- De formule geeft 1621 en 3098 — 1
- De relatieve afwijkingen zijn 28% en 23% (of nauwkeuriger) — 2
- Het antwoord: 1850 — 1

2 maximumscore 3

- Beschrijven hoe de vergelijking $N = 20000$ opgelost kan worden — 2
- Het antwoord: 2238 (of 2237) — 1

3 maximumscore 4

- De groeifactor per jaar is de oplossing van de vergelijking $g^{50} = \frac{2516}{1656}$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden — 1
- $g = 1,008400$ (of nauwkeuriger) — 1
- Het antwoord: 0,8400% — 1

4 maximumscore 4

- Het opstellen van een formule, bijvoorbeeld $N = 795 \cdot 1,004656^{t-1750}$, voor de wereldbevolking N in deze periode — 2
- Beschrijven hoe de vergelijking $N = 1000$ opgelost kan worden — 1
- Het antwoord: 1800 (of 1799) — 1

5 maximumscore 4

- Het aantal geboortes per jaar is $0,023 \cdot 5760 \cdot 1,01092^t$ — 1
- Beschrijven hoe $\sum_{t=0}^{t=7} 0,023 \cdot 5760 \cdot 1,01092^t$ berekend kan worden — 2
- Het antwoord: 1101 miljoen — 1

E. Koolstofdatering

1 maximumscore 3

- $100 \cdot g^{5730} = 50$ — 1
- Beschrijven hoe bovenstaande vergelijking wordt opgelost — 1
- Het antwoord: 0,999879 — 1

2 maximumscore 2

- $Q = 100 \cdot 0,99988^{60000}$ — 1
- Het antwoord: 0,07(%) — 1

3 maximumscore 4

- Uit $Q = 100 \cdot 0,99988^t$ volgt: $0,99988^t = \frac{Q}{100}$ — 1
- $t = \dfrac{\ln\left(\frac{Q}{100}\right)}{\ln(0,99988)}$ — 1
- $t = \dfrac{\ln(Q) - \ln(100)}{\ln(0,99988)}$ — 1
- Dit is, bij benadering, gelijk aan $t = \dfrac{\ln(Q) - 4,6052}{-0,00012}$ — 1

4 maximumscore 4

- $Q = 73,19$ geeft $t = \dfrac{\ln(73,19) - 4,6052}{-0,00012}$ — 1
- $t \approx 2600$ (jaar BP) (of nauwkeuriger) — 1
- In de figuur aflezen dat bij een berekende ouderdom van 2600 BP een werkelijke ouderdom van (ongeveer) 2750 BP hoort — 1
- $2750 - 1950 = 800$ dus 800 voor Chr. (of nauwkeuriger) — 1

5 maximumscore 4

- $20550 - 19925 = 625$ (jaar) en $22650 - 21925 = 725$ (jaar) — 1
- De ouderdom is $21925 + \frac{175}{625} \cdot 725$ (jaar voor Chr.) — 2
- $21925 + 203 = 22128$ dus 22130 voor Chr. — 1

F. Verkeersdrempels

1 maximumscore 3

- De periode (of het verschil tussen twee nulpunten) moet bepaald worden — 1
- De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi}$ — 1
- Het antwoord: 4 (meter) — 1

2 maximumscore 4

- De vergelijking $0,06+0,06\sin\left(\frac{1}{2}\pi x-\frac{1}{2}\pi\right)=0,1$ moet worden opgelost — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking met de GR opgelost kan worden — 1
- De oplossingen 1,465 en 2,535 (of nauwkeuriger) — 1
- Het antwoord 1,07 meter (of 107 cm) — 1

3 maximumscore 4

- Bij een sinusoïde treedt maximale helling op bij het passeren van de evenwichtsstand — 2
- Dit is voor het eerst het geval voor $x=1$ — 1
- Het antwoord: 1 (meter van het begin) — 1

4 maximumscore 3

- $a=b=0,07$ (of nauwkeuriger) — 1
- $c=\frac{2\pi}{12}$ (of nauwkeuriger) — 1
- $d=\frac{12}{4}=3$ (of nauwkeuriger) — 1

G. Berlijnse klok

1 maximumscore 4

- Elke 5 minuten gaat de lamp 1 keer aan — 1
- Dat is 12 keer per uur — 1
- Na 13 uur dus 156 keer — 1
- Om 13:48u dus $156+9=165$ keer (de lamp brandt nu niet) — 1

2 maximumscore 4

- Op 2 verschillende rijen telkens 1 lamp: $\binom{5}{2}=10$ — 2
- Op 1 rij 2 lampen: 4 mogelijkheden — 1
- In totaal zijn er dus 14 mogelijkheden — 1

3 maximumscore 5

- 12 uur = 720 ‘minuut’-tijdstippen — 1
- De 4e rij geeft 5 mogelijkheden, de 3e rij 4, de 2[e] rij 3 en de 1[e] rij 2 — 1
- In combinatie met de 5e rij zijn dat 6! mogelijke ‘minuut’-tijdstippen — 2
- En 6! = 720 — 1

Vraag	Antwoord	Scores

H. Sluipwespen

1 maximumscore 3

- Het aantal larven met eitjes afgelezen uit de grafiek is 47 (of een andere gehele waarde in het interval $[45,50]$) 1
- Het aantal volgens de formule is $64\cdot(1-e^{-0,01\cdot 100})\approx 40,46$ 1
- Het verschil is $47-40=7$ larven 1

2 maximumscore 4

- $E'=64\cdot -e^{-0,01L}\cdot -0,01$ 1
- Dit herleiden tot $E'=0,64\cdot e^{-0,01L}$ 1
- E' is altijd positief dus de grafiek van E is stijgend 1
- E' neemt af voor toenemende L dus de grafiek van E is afnemend stijgend, dus het aantal larven met eitjes E neemt steeds minder snel toe als het totale aantal larven L toeneemt 1

of

- $E'=64\cdot -e^{-0,01L}\cdot -0,01$ 1
- Een schets van de grafiek van E' 1
- E' is altijd positief dus de grafiek van E is stijgend 1
- E' neemt af voor toenemende L dus de grafiek van E is afnemend stijgend, dus het aantal larven met eitjes E neemt steeds minder snel toe als het totale aantal larven L toeneemt 1

3 maximumscore 3

- Voor grote waarden van L geldt $e^{-0,01}\approx 0$ 2
- De grenswaarde van E is $64\cdot(1-0)=64$ 1

of

- Het berekenen van de waarde van E bij een grote waarde van L 2
- De grenswaarde van E is 64 1

Korte onderzoeksopgaven

I. onderzoeksopgave: Groenbelegging

1 maximumscore 7

- Een boom van 8 jaar levert ongeveer $0{,}16 \cdot 0{,}108^2 \cdot 7 \approx 0{,}0131$ m³ hout en voor een boom van 15 en 20 jaar is dit 0,0324 resp. 0,0635 m³ 1
- De houtopbrengst na 8 jaar is $0{,}0131 \cdot 200 \cdot 600 \approx 1572$ euro; na 15 jaar is dit $0{,}0324 \cdot 300 \cdot 600 \approx 5832$ euro en na 20 jaar is $0{,}0635 \cdot 460 \cdot 600 \approx 17526$ euro 1
- De totale houtopbrengst is naar verwachting ten minste gelijk aan 24900 euro(of nauwkeuriger) 1
- De spaarrekening levert $5000 \cdot 1{,}08^{20} \approx 23300$ euro op (of nauwkeuriger), dus de bewering klopt 1
- $5000 \cdot g^{20} = 24900$ 1
- $g \approx 1{,}084$ (of nauwkeuriger) 1
- Een spaarrekening met een rente van 8,4% zou minstens even veel opbrengen 1

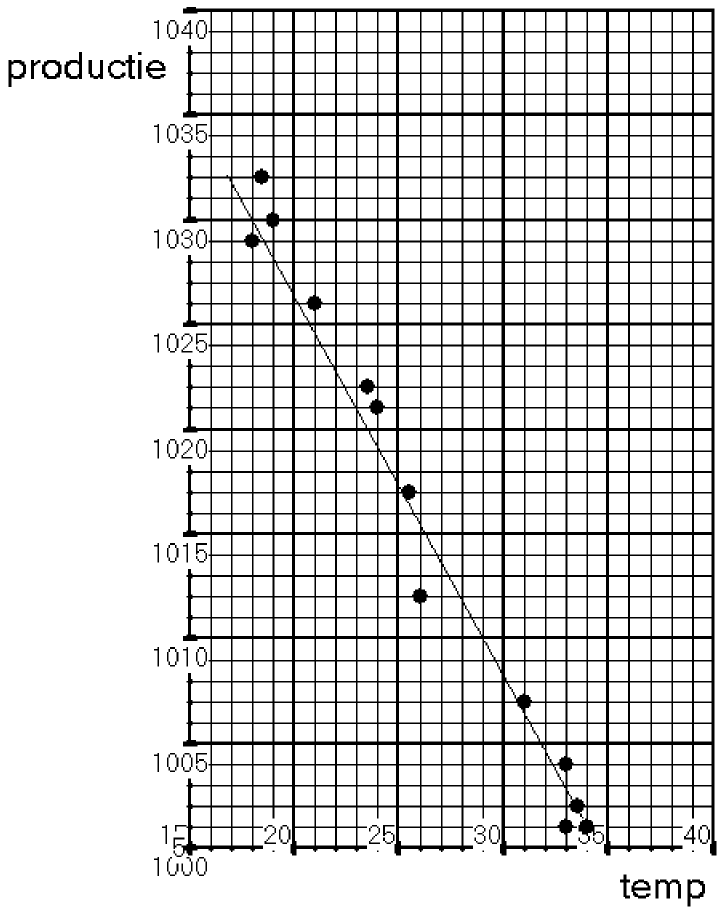
J. onderzoeksopgave: Productie en temperatuur

1 maximumscore 8

- Maximumtemperatuur en 'bijbehorende' productie via een tabel aan elkaar koppelen: 4

max.temp	productie		max.temp	productie		max.temp	productie
			31	1007		26	1012
18,5	1032		33	1004		25,5	1017
19	1030		33,5	1002		24	1021
21	1026		34	1001		21	1026
23,5	1022		33	1001		18	1029

- Temperatuur en productiegegevens in een grafiek plaatsen 1
- Het tekenen van een lijn die het verband benadert 1



- Opstellen van een vergelijking, bijvoorbeeld $P = -1,7 \cdot T + 1060$ 2

K. onderzoeksopgave: Quadominos

1 maximumscore 8

- Er zijn zes stenen met vier dezelfde cijfers 1
- Het aantal stenen met precies drie dezelfde cijfers erop is $6 \cdot 5$ 1
- Het aantal stenen met twee keer twee dezelfde cijfers erop is $\frac{6 \cdot 5}{2}$ 1
- Het aantal stenen met twee dezelfde cijfers en daarnaast twee verschillende cijfers erop is $6 \cdot \binom{5}{2}$ 2
- Het aantal mogelijke stenen met vier verschillende cijfers erop is $\binom{6}{4}$ 1
- Het werkelijke aantal stenen met vier verschillende cijfers erop is $\binom{6}{4} - 1$ 1
- In totaal zijn er $6 + 30 + 15 + 60 + 14 = 125$ stenen 1

L. onderzoeksopgave: Elektriciteit

1 maximumscore 7

- Het opstellen van een formule die hoort bij een laagtariefverbruik l en een normaaltariefverbruik n,, uitgaande van keuzetarief Standaard: $S = 17{,}85 + 0{,}0419 \cdot l + 0{,}0749 \cdot n$ — 2
- De overeenkomstige formule, uitgaande van keuzetarief Plus: $P = 35{,}70 + 0{,}0364 \cdot l + 0{,}0743 \cdot n$ — 1
- Uit $S = P$ volgt de vergelijking $0{,}0055 \cdot l + 0{,}0006 \cdot n = 17{,}85$ — 1
- Het tekenen van de grafiek van de lijn $S = P$ in het assenstelsel — 1
- De verschillende vlakdelen waarin het gebied verdeeld wordt door de grafieken, voorzien van de juiste aanduidingen Budget, Standaard en Plus (zie onderstaande figuur) — 2

Voorbeeld figuur